प्रादर्श प्रश्न-पत्र

MODEL QUESTION PAPER

उच्च गणित

HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे | कक्षा . 12वीं | पूर्णांक : 100

Time : 3 hours | Class - XIIth | M.M. : 100

निर्देश :–

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
2. प्रश्न पत्र में दिये गये निर्देशों का सावधानी पूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. प्रश्न क्रमांक – 06 से 21 तक में आंतरिक विकल्प दिये गये हैं ।
4. प्रश्न क्रमांक – 06 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आवंटित हैं ।
5. प्रश्न क्रमांक – 13 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आवंटित हैं ।
6. प्रश्न क्रमांक – 20 से 21 तक प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आवंटित हैं ।

Instructions :-

1. All questions are compulsory.
2. Read the Instructions of question paper carefully and write their answer.
3. Internal option are given in Question No. 06 to 21.
4. Question No. 06 to 12 carry 4 marks each.
5. Question No. 13 to 19 carry 5 marks each.
6. Question No. 20 to 21 carry 6 marks each.

प्र.01 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर लिखिए ।

Write the correct answer from the given option provided in every objective type questions.

(अ) $\frac{1}{x^2-1}$ **की आंशिक भिन्न है :**

(i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ (iii) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

(iv) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}$

(A) Partial fraction of

(i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ (iii) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

(iv) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}$

Cont...2

(ब) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ **का मान होगा :**

(i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) π

(B) **Value of** $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ **is :**

(i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) π

(स) ***x* अक्ष की दिक् कोज्याएँ हैं :**

(i) (1,0,0) (ii) (0,1,0) (iii) (0,0,1) (iv) (1,1,1)

(C) **Direction cosines of *x* - axis are :**

(i) (1,0,0) (ii) (0,1,0) (iii) (0,0,1) (iv) (1,1,1)

(द) **बिन्दु (3,-5,6) तथा (7,-8,6) के बीच की दूरी है :**

(i) 3 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6

(D) **Distance between point (3,-5,6) and (7,-8,6) is :**

(i) 3 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6

(इ) **यदि** $\overrightarrow{OP} = i + 4j - 3k$ **तथा** $\overrightarrow{OQ} = 2i - 2j - k$ **तो** $\overrightarrow{PQ}$ **का मापांक होगा:**

(i) $\sqrt{41}$ (ii) $\sqrt{26}$ (iii) $\sqrt{14}$ (iv) 3

(E) **If** $\overrightarrow{OP} = i + 4j - 3k$ **and** $\overrightarrow{OQ} = 2i - 2j - k$ **then modulus of** $\overrightarrow{PQ}$ **is:**

(i) $\sqrt{41}$ (ii) $\sqrt{26}$ (iii) $\sqrt{14}$ (iv) 3

प्र.02 निम्न प्रश्नों के उत्तर एक वाक्य में दीजिए :

Write the answer in one sentence :

(i) सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए ।

Write the Simpson's 1/3rd rule.

(ii) समलम्ब चतुर्भुज या ट्रापेजोएडल नियम को लिखिए ।

Write the Trapezoidal rule.

(iii) न्यूटन रेफसन विधि में प्रथम आवृत्ति के लिए सूत्र लिखिए ।

Write the Formula for first iteration by Newton's Raphson's Method.

(iv) सामान्यीकृत प्लवन बिन्दु में अभिव्यक्त संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

.23452 E 07 + .31065 E 07

Find the sum in normalised Floating point representation.

.23452 E 07 + .31065 E 07

Cont....3

(v) सामान्यीकृत प्लवन बिन्दु में अभिव्यक्त संख्याओं को घटाइये :

0.4624 E 12 को 0.4657 E 12 से

Subtract in normalised Floating point representation.

0.4624 E 12 from 0.4657 E 12

प्र.03 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :–

(i) अभिलम्ब के रूप में समतल का समीकरण ..... है ।

(ii) गोले $4x^2+4y^2+4z^2 - 8x+12y+16z - 3 = 0$ का व्यास ..... है।

(iii) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ लम्बवत् हों, तो $\vec{a}.\vec{b}$ = ... है ।

(iv) कार्ल पियर्सन का x व y के बीच सहसंबंध–गुणांक का सूत्र ..... है।

(v) सहसंबंध गुणांक, साभाश्रयण गुणांक का ..... माध्य होता है ।

Fill in the blanks :-

(i) Equation of plane in normal form is _____.

(ii) Diameter of sphere $4x^2+4y^2+4z^2 - 8x+12y+16z - 3 = 0$ _____.

(iii) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular, then $\vec{a}.\vec{b}$ = _____.

(iv) The Karl Pearson's Coefficient of correlation between variables x and y is _____.

(v) Correlation coefficient is the _____ mean of the regression coefficient.

प्र.04 निम्नलिखित कथनों को सत्य/असत्य लिखिए ।

(i) बिन्दु $-2i+4j+7k$, $3i-6j-8k$ तथा $i-2j-2k$ समरेख हैं ।

(ii) $(i \times j) \times k$ का मान $\vec{k}$ है ।

(iii) किसी भी कण का अधिकतम ऊँचाई पर वेग सदैव शून्य होता है ।

(iv) फलन ax^3+bx^2+cx+d का द्वितीय अवकलन $6ax+2b$ है ।

(v) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Write True/False in the following statements.

(i) The points $-2i+4j+7k$, $3i-6j-8k$ and $i-2j-2k$ are collinear.

(ii) The value of $(i \times j) \times k$ is k

(iii) The velocity of the particle at the maximum height is always zero.

(iv) Second derivative of the function ax^3+bx^2+cx+d is $6ax+2b$.

(v) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Cont....4

प्र.05 सही जोड़ी बनाइये :

	A		B
(i)	$\int \frac{dx}{1+\sin x}$	(a)	$\text{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$
(ii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(b)	Sin x
(iii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(c)	tan x - sec x + c
(iv)	$\int_1^2 \log x dx$	(d)	$\log [x + \sqrt{x^2-a^2}]$
(v)	$\int \cos x dx$	(e)	2 log 2-1

Match the column :

	A		B
(i)	$\int \frac{dx}{1+\sin x}$	(a)	$\text{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$
(ii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(b)	Sin x
(iii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(c)	tan x - sec x + c
(iv)	$\int_1^2 \log x dx$	(d)	$\log [x + \sqrt{x^2-a^2}]$
(v)	$\int \cos x dx$	(e)	2 log 2-1

अति लघु–उत्तरीय प्रश्न
Very short answer type question.

प्र.06 $\frac{1}{1+x^3}$ **को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिए ।**

Resolve $\frac{1}{1+x^3}$ into partial fractions.

अथवा OR

$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^3}$ **को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिए ।**

Resolve $\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^3}$ into partial fraction.

प्र.07 सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

Prove that $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

Cont....5

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3 = 3\pi/4$

Prove that $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3 = 3\pi/4$

प्र.08 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ **का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।**

Find the differential coefficient of $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ **with respect to x**

अथवा OR

$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ **का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।**

Find the differential coefficient of $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ **w.r.t. x**

प्र.09 यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\ldots}}}$ **तो सिद्ध कीजिए कि** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

If $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\ldots}}}$ **then prove that** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

अथवा OR

यदि $\sin y = x \sin(a+y)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2(a+y)}{\sin a}$

If $\sin y = x \sin(a+y)$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2(a+y)}{\sin a}$

प्र.10 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = ax+b$ जबकि a व b अचर हैं तथा $a > o$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए वर्द्धमान फलन है ।

Prove that $f(x) = ax+b$, where a and b are constants and $a > o$, is an increasing function.

अथवा OR

x के किस मान के लिए $y = x(5-x)$ महत्तम अथवा न्यूनतम होगा ।

For what value of x, $y = x(5-x)$ is maximum or minimum.

प्र.11 निम्नलिखित आंकड़ों के लिए x व y के मध्य सह विचरण ज्ञात कीजिए ।

$\square xi = 55$, $\square yi = 74$, $\square xiyi = 411$, $n = 10$

Find the co-variance between x and y for the following datas.

$\square xi = 55$, $\square yi = 74$, $\square xiyi = 411$, $n = 10$

Cont.....6

अथवा OR

निम्नलिखित आंकड़ों के लिए x व y के मध्य कार्लपियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Find the Karl Pearson's Coefficient of correlation between x and y for the following data.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

प्र.12 यदि दो चरों x और y की समाश्रयण रेखाओं के बीच कोण की शार्थज्या 0.6 है और $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$ तो x व y के मध्य सहसंबंध ज्ञात कीजिए ।

The tangent between regressions lines of two variable x and y is 0.6 and $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$. calculate the coefficient of correlation between x and y.

अथवा OR

यदि y की x पर समाश्रयण रेखा ax + by + c = o और x की y पर समाश्रयण रेखा $a_1x + b_1y + c_1 = o$ है तो सिद्ध कीजिए कि $ab_1 \leq a_1b$

If the regression line of y on x is ax + by + c = o and that of x on y is $a_1x + b_1y + c_1 = o$ then prove that $ab_1 \leq a_1b$

प्र.13 बिन्दुओं (0,-1,0), (2,1,-1) तथा (1,1,1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the Equation to the plane passing through the point (0,-1,0), (2,1,-1) and (1,1,1)

अथवा OR

एक समतल निर्देशांक अक्षों पर बिन्दुओं A,B और C से मिलता है । ΔABC का केन्द्रक (a,b,c) है । सिद्ध कीजिए कि समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{b} = 3$ है ।

A plane meets the co-ordinate axes at A,B,C such that the control of ΔABC is the point (a,b,c). Show that the equation to the plane is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{b} = 3$

प्र.14 यदि दो एकांक सदिशों का योग एक अन्य एकांक सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि उनके अन्तर का परिमाण $\sqrt{3}$ है ।

If the sum of two unit vectors is a unit vector, prove that the magnitude of their difference is $\sqrt{3}$

Cont.....7

अथवा OR

सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि ΔABC में भुजाओं के लम्ब अर्द्धक संगामी होते हैं ।

For any ΔABC, show that the perpendicular bisectors of the sides are concurrent.

प्र.15 निम्नांकित सीमाओं की गणना कीजिए :

$$\lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}$$

Evaluate :

$$\lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}$$

अथवा OR

निम्नांकित फलन की x = 0 पर संतत्य की विवेचना कीजिए ।

$$f(x) \quad \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & : \ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & : \ x = 0 \end{cases}$$

Discuss the continuity of the following at x = 0

$$f(x) \quad \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & : \ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & : \ x = 0 \end{cases}$$

प्र.16 समाकलन ज्ञात कीजिए ।

$$\int \sec^3 x \, dx$$

Evaluate :

$$\int \sec^3 x \, dx$$

अथवा OR

समाकलन ज्ञात कीजिए ।

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} \, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} \, dx$$

प्र.17 परवलय $y^2 = 4ax$ और उसकी नाभिलम्ब जीवा से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum.

Cont....8

अथवा OR

सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

प्र.18 अवकल समीकरण हल कीजिए

$$x + y \frac{dy}{dx} = 27$$

Solve the differential equation

$$x + y \frac{dy}{dx} = 27$$

अथवा OR

अवकल समीकरण हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

प्र.19 एक थैले में 50 बोल्ट तथा 150 नट हैं । आधे बोल्ट और आधे नट जंग लगे हैं । यदि यदृच्छया एक नग थैले में से निकाला जाये तो इसके जंग लगे हुए नग या बोल्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A bag contains 50 bolts and 150 nuts. Half of the bolts and Half of the nuts are rusted. If one item is taken out at random, What is the probability that it is rusted or is a bolt.

अथवा OR

एक थैले में 3 लाल, 4 सफेद व 5 नीली गेंदे हैं । सभी गेंदे भिन्न हैं । दो गेंदें यदृच्छया निकाली जाती हैं, तो उनके भिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A bag contains 3 red, 4 white and 5 blue balls. All balls are different. Two balls are drawn at random. Then find the probability that they are different colours.

Cont.....9

प्र.20 **एक गोले की त्रिज्या K है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है । यह अक्षों से A,B व C बिन्दुओं पर मिलता है । सिद्ध कीजिए कि ΔABC का केन्द्रक गोले $9(x^2+y^2+z^2) = 4K^2$ पर स्थित है ।**

A sphere of constant radius K passes through the Origin and meets of axes at A,B,C prove that the centrold of ΔABC lies on the sphere is $9(x^2+y^2+z^2) = 4K^2$.

अथवा OR

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशाँक्ष समतलों को स्पर्श करता है तथा बिन्दु (1,1,2) से होकर जाता है ।

Find the Equation of the sphere which touches co=ordinate planes and passes through the point (1,1,2)

प्र.21 **समतल $\vec{r}\,(i+2j+2k) = 18$ द्वारा गोला $|\vec{r}| = 10$ पर काटे जाने पर उत्पन्न वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।**

Find the radius of a circular section made by the plane $\vec{r}\,(i+2j+2k) = 18$ on a sphere $|\vec{r}| = 10$

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि

$\vec{r} = (4i - 3j - k) + \lambda\,(i - 4j + 7k)$ और $\vec{r} = (i - j - 10k) + \lambda_1\,(2i - 3j + 8k)$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं ।

Prove that the lines

$\vec{r} = (4i - 3j - k) + \lambda\,(i - 4j + 7k)$ and $\vec{r} = (i - j - 10k) + \lambda_1\,(2i - 3j + 8k)$ are intersecting lines.

† † † † † † † † † †

आदर्श उत्तर

MODEL ANSWER

उच्च गणित

HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे | कक्षा . 12वीं | पूर्णांक : 100

Time : 3 hours | Class - XIIth | M.M. : 100

उ.01 का हल । **प्रत्येक सही पर 1 अंक** (1x5 = 5)

Ans. **अ** (A) (iii) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

ब (B) (i) $\frac{\pi}{4}$

स (C) (i) (1,0,0)

द (D) (iii) 5

इ (E) (i) $\sqrt{41}$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.02 का हल । **प्रत्येक सही पर 1 अंक** (1x5 = 5)

Ans. (i) $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5+____+y_{n-1}+2(y_2+y_4+_____+y_{n-2})+y_n]$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0+2(y_1+y_2+y_3+____+y_{n-1})+y_n]$ **जहाँ** $h = \frac{b-a}{n}$

(iii) **सूत्र प्रथम आवुत्ति** $x, = x_0 - \frac{f(x_0)}{f_1(x_0)}$

(iv) .54517 E 07

(v) .0033 E-12

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.03 का हल **प्रत्येक सही पर 1 अंक** (1x5 = 5)

Ans. (i) $lx+my+nz = p$

(ii) $4\sqrt{2}$

(iii) 0 (zero)

(iv) $\frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 \times \sum (y-\bar{y})^2}}$

(v) **गुणोत्तर** (Geometric)

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....2

उ.04 का हल **प्रत्येक सही पर 1 अंक** (1x5 = 5)

Ans. (i) **सत्य** True

(ii) **असत्य** False

(iii) **सत्य** True

(iv) **सत्य** True

(v) **असत्य** False **(कुल** 1+1+1+1+1 = 5 **अंक)**

उ.05 सही जोड़ी **प्रत्येक सही पर 1 अंक** (1x5 = 5)

Ans.

	(A)		(B)
(i)	$\int \frac{dx}{1+\sin x}$	(c)	tanx-secx+c
(ii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(a)	$\sin^{-1} x/a$
(iii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(d)	$\log [x+\sqrt{x^2-a^2}]$
(iv)	$\int_1^2 \log x dx$	(e)	2log2-1
(v)	$\int \cos x dx$	(b)	sinx

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 **अंक)**

उ.06 का हल

Ans. '.' $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ 1 **अंक**

अतः माना कि $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}$ **समी.** ---- (i)

या $\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)}$

या $1 = A(1-x+x^2) + (Bx+C)(1+x)$ **समी.** ---- (ii)

$x = -1$ **रखने पर**

$1 = A(1+1+1) + [B(-1)+C][1-1]$

या $3A + (-B+C)(0) = 1$

या $3A = 1$

$A = 1/3$ 1 **अंक**

x^2 **के गुणांक की तुलना करने पर**

$A + B = 0$

या $\frac{1}{3} + B = 0$

$B = -1/3$

अचर पद के गुणांक की तुलना करने पर

$A + C = 1$

$\frac{1}{3} + C = 1$

Cont....3

$C = 1 - 1/3$

$C = 2/3$ 1 अंक

अतः अभिष्ट आंशिक भिन्न

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)x + \frac{2}{3}}{1-x+x^2}$$

या $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{x-2}{3(1-x+x^2)}$$ (कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

माना $x - 1 = y$

तब $x = 1 + y$ 1 अंक

अतः $$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4} = \frac{3(1+y)^3-8(1+y)^2+10}{y^4}$$

$$= \frac{3(1+3y+3y^2+y^3)-8(1+2y+y^2)+10}{y^4}$$ 1 अंक

$$= \frac{3+9y+9y^2+3y^3-8-16y-8y^2+10}{y^4}$$

$$= \frac{3y^3+y^2-7y+5}{y^4}$$

$$= \frac{3y^3}{y^4} + \frac{y^2}{y^4} - \frac{7y}{y^4} + \frac{5}{y^4}$$

$$= \frac{3}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{7}{y^3} + \frac{5}{y^4}$$ 1 अंक

y का मान प्रतिस्थापित करने पर अभिष्ट आंशिक भिन्न

$$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4} = \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{7}{(x-1)^3} \quad \frac{5}{(x-1)^4}$$ 1 अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

उ.07 का हल

Ans. बायां पक्ष $\tan^{-1}\sqrt{x}$

या $\frac{1}{2}\ 2\tan^{-1}\sqrt{x}$ ---------- (1) अंक

या $\frac{1}{2}\left[\cos^{-1}\frac{(1-\sqrt{x^2})}{(1+\sqrt{x^2})}\right]$ '.' $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ------- (1) अंक

या $\frac{1}{2}\left[\cos^{-1}\frac{(1-x)}{(1+x)}\right]$ ---------- (1) अंक

अतः $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ ---------- (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont....4

अथवा OR

LHS = $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$

= $\pi + \tan^{-1}\left[\frac{(2+3)}{1-2x3}\right]$ ---------- (2) अंक

= $\pi + \tan^{-1}\ 5/-5$

= $\pi + \tan^{-1}(-1)$

= $\pi - \tan^{-1}(1)$ ---------- (1) अंक

= $\pi - \pi/4$

= $\frac{4\pi - \pi}{4}$

= $\frac{3\pi}{4}$ ---------- (1) अंक

(कुल 2+1+1 = 4 अंक)

उ.08 का हल

Ans. माना $y = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{a}+\sqrt{x}) - (\sqrt{a}+\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$ (1) अंक

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}) - (\sqrt{a}+\sqrt{x})(0-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(\sqrt{a}-\sqrt{x})}$ (1) अंक

$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{1}{2}}{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$ (1) अंक

$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$y = \sqrt{\frac{2\sin^2 x/2}{x\cos^2 x/2}}$ (1) अंक

$y = \sqrt{\tan^2 x/2}$ (1) अंक

$y = \tan x/2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan {}^{x}/_{2}$

Cont.....5

$= \quad \sec^2 x/2 \times \frac{d}{dx} x/2$ (1) अंक

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sec^2 x/2$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

उ.09 का हल

$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+ \ldots\ldots\ldots}}}$

या $y = \sqrt{x + y}$ (1) अंक

या $y^2 = x + y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} y$ (1) अंक

या $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ (1) अंक

या $2y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1$

या $\frac{dy}{dx} (2y - 1) = 1$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

'.' $\sin y = x \sin (a+y)$

'.' $x = \frac{\sin y}{\sin (a+y)}$ (1) अंक

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$1 = \frac{\sin (a+y). \frac{d}{dx} \sin y - \sin y. \frac{d}{dx} \sin (a+y)}{\sin^2 (a+y)}$ (1) अंक

$1 = \frac{\sin (a+y) . \cos y \frac{dy}{dx} - \sin y. \cos (a+y) . \frac{d}{dx} (a+y)}{\sin^2 (a+y)}$ (1) अंक

या $\sin^2 (a+y) = \sin (a+y). \cos y \frac{dy}{dx} - \sin y. \cos (a+y). \frac{dy}{dx}$

या $\sin^2 (a+y) = \frac{dy}{dx} [\sin (a+y). \cos y - \cos (a+y). \sin y]$

या $\sin^2 (a+y) = \frac{dy}{dx} [\sin (a+y-y)]$

Cont.....6

या $\frac{dy}{dx}$. sin a = $\sin^2$ (a+y)

(1) अंक

या $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

उ.10 का हल

माना x_1, x_2 E R और $x_1 < x_2$ (1) अंक

'.' $x_1 < x_2$ (1) अंक

तब $ax_1 < ax_2$ '.' a > o

या $ax_1 + b < ax_2 + b$ (1) अंक

या $f(x_1) < f(x_2)$

'.' $x_1 < x_2$ के लिए $f(x_1) < f(x_2)$ (1) अंक

'.' सभी वास्तविक मानों के लिए f(x) एक वर्धमान फलन है ।

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

'.' y = x (5-x)

या y = $5x - x^2$ (1) अंक

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = 5 \frac{.d}{dx} x - \frac{d}{dx} x^2$ (1) अंक

= 5 x 1 - 2x

या $\frac{dy}{dx}$ = 5 - 2x समी. (1) (1) अंक

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = - 2$

फलन को महत्तम अथवा न्यूनतम होने के लिए

$\frac{dy}{dx} = 0$

5-2x = 0

x = 5/2 (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....7

उ.11 का हल

$\because$ □xi = 55, □yi = 74, □xiyi = 411, n = 10

x व y **के मध्य सह–विचरण**

$$cov(x,y) = \frac{1}{n}[\square xiyi - 1\ \square xi\ .\ \square yi] \quad (2)\ \text{अंक}$$

$$= \frac{1}{10}\left(411 - \frac{1}{10} \times 55 \times 74\right) \quad (1)\ \text{अंक}$$

$$= \frac{1}{10}[411 - 407]$$

$$= \frac{4}{10}$$

$$= 0.4 \quad (1)\ \text{अंक}$$

(कुल 2+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

□xi = 45, □yi = 108, n = 9

$$x = \frac{\square x_i}{n} = \frac{45}{9} = 5$$

$$y = \frac{\square y_i}{n} = \frac{108}{9} = 12$$

$\square ui = 0$, $\square vi = 0$, $\square uivi = 57$, $\square u^2_i = 60$, $\square v^2_i = 60$ (2) अंक

$$P(x,y) = P(u,v) = \frac{n\square uivi - \square ui\square vi}{\sqrt{n\square u^2_i - (\square ui)^2}\ .\ \sqrt{n\square v^2_i - (\square vi)^2}} \quad (1)\ \text{अंक}$$

$$= \frac{9 \times 57 - 0 \times 0}{\sqrt{9\times60-0}\ .\ \sqrt{9\times60-0}} = \frac{9 \times 57}{9 \times 60} = \frac{57}{60}$$

$$P(u,u) = 0.95\ \text{Ans.} \quad (1)\ \text{अंक}$$

(कुल 2+1+1 = 4 अंक)

उ.12 का हल

$$\because \tan\theta = \frac{1 - P^2}{P} \times \frac{\square x\ .\ \square y}{a^2 + y^2} \quad (1)\ \text{अंक}$$

यहाँ $\tan\theta = 0.6$, $\square x = \frac{1}{2}\square y$

$$\because 0.6 = \frac{1 - P^2}{P} \times \frac{\frac{1}{2} y \times y}{\left(\frac{1}{2}\square y\right)^2 + \square y^2}$$

$$0.6 = \frac{1 - P^2}{P} \times \frac{\frac{1}{2}\ \square y^2}{\frac{1}{2}\ \square y^2 + \square y^2}$$

$$= \frac{1 - P^2}{P} \times \frac{1}{2} \cancel{\square y^2} \times \frac{4}{5 \cancel{\square y^2}}$$

$$= \frac{1 - P^2}{P} \times \frac{2}{5}$$ (1) अंक

या $\frac{2}{5}\left(\frac{1 - P^2}{P}\right) = \frac{6}{10}$

$$\frac{1 - P^2}{P} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{2}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$3P = 2 - 2P^2$$

या $2P^2 + 3P + 2 = 0$ (1) अंक

$$2P^2 + 4P - P + 2 = 0$$

$$2P(P+2) - 1(P+2) = 0$$

$$(P + 2)(2P - 1) = 0$$

$\Rightarrow$ $P = -2$ या $+ 1/2$

किन्तु $-1 \leq P \leq 1$

'.' $P \neq -2$ अतः $P = 1/2$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

'.' y की y की समाश्रयण रेखा का समी.

$$ax + by + c = 0$$

$$by = - ax - c$$

$$y = \left(\frac{-a}{b}\right)x + \left(\frac{-c}{b}\right)$$

अतः $byx = - \frac{a}{b}$ (1) अंक

x की y पर समाश्रयण रेखा का समी.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_1x = -b_1y - c_1$$

$$\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) \quad \left(\frac{-c_1}{a_1}\right)$$

$x = \qquad y +$

Cont....9

अतः $bxy = \frac{-b_1}{a_1}$ (1) अंक

'.' $P^2 = byx \times bxy$

$x = \left(\frac{-a}{b}\right) \times \left(\frac{-b_1}{a_1}\right)$

$P2 = \frac{ab_1}{ba_1}$ (1) अंक

लेकिन '.' $P^2 \leq 1$

'.' $\frac{ab_1}{ba_1} \leq 1$

या $ab_1 \leq ba_1$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

उ.13 का हल

बिन्दुओं (0,-1,0) से होकर जाने वाली समतल का समी.

$a(x-0) + b(y+1) + (z-0) = 0$ ---- समी. (i) (1) अंक

यदि यह अन्य दो दिए बिन्दुओं (2,1,-1) और (1,1,1) से भी गुजरे तो

$2a + 2b - c = 0$ ---- समी. (ii) (1) अंक

तथा $a + 2b + c = 0$ ---- समी. (iii) (1) अंक

(ii) व (iii) को वज्रगुणन बिन्दु से हल करने पर

$\frac{a}{2+2} = \frac{b}{-1-2} = \frac{c}{4-2}$

अर्थात् $\frac{a}{4} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{2} = K$ (माना) (1) अंक

इन मानों से (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$4x - 3y + 2z - 3 = 0$ (1) अंक

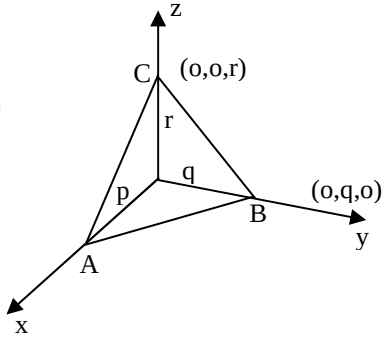
(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

मान लीजिए की समतल का समीकरण

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ ---- समी. (i)

यह अक्षों से क्रमशः A,B व C



बिन्दुओं पर मिलता है जिनके निर्देशांक

(p,o,o), (o,q,o) और (o,o,r) है । (1) अंक

Cont....10

स्पष्टतः ΔABC का केन्द्रक

$$\frac{p+o+o}{3} \ , \ \frac{o+q+o}{3} \ , \ \frac{o+o+r}{3}$$ (1) अंक

अर्थात् (p/3, q/3, r/3) है ।

परन्तु प्रश्नानुसार केन्द्रक (a,b,c) है ।

$\because \frac{p}{3} = a, \ \frac{q}{3} = b,$ तथा $\frac{r}{3} = c$

या $p = 3a, \ q = 3b, \ r = 3c$ (1) अंक

समीकरण (1) में ये मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1$$

या $$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 3$$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.14 का हल

माना तीन एकांक सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ व $\vec{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (1) अंक

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$\because \ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{c}|^2$

या $1 + 1 + 2\vec{a}.\vec{b} = 1$ (1) अंक

$[\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1]$

या $2\vec{a}.\vec{b} = 1$

या $\vec{a}.\vec{b} = -1/2$ (1) अंक

अब $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$ (1) अंक

$= 1 + 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

$\because \ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

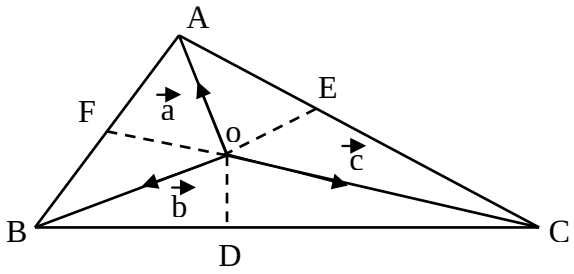
ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D,E और F है ।

भुजाओं BC और CA पर D और E बिन्दुओं से खींचे गए एक लम्ब O पर मिलते हैं । OF को मिलाया सिद्ध करना है कि OF ⊥ AB (1) अंक

O को मूल बिन्दु मानकर इसके सापेक्ष A, B और C के स्थित सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मानें । ***Cont....11***

---11---

तब



$OD = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

$OE = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$

$OF = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

'.' $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BC}$ (2) अंक

अतः $\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \cdot (\vec{c}-\vec{b}) = o$

अर्थात् $\vec{c}^2 - \vec{b}^2 = o$ ---- (i) समी.

या $\vec{c}^2 = \vec{b}^2$

पुनः $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{AC}$ होने पर

$\vec{a}^2 - \vec{c}^2 = o$ या $\vec{a}^2 = \vec{c}^2$ ---- (ii) समी. (1) अंक

(i) व (ii) से $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

या $(a^2-b^2) = o$

या $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = o$

या OF . BA = o '.' OF ⊥ AB

अतः Δ की भुजाओं के लम्ब अधिक संगामी होते हैं । (1) अंक

(कुल 1+2+1+1 = 5 अंक)

उ.15 का हल

$$\lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}$$ (1) अंक

$$= \lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{3 - x - 3} \times (\sqrt{3-x} + \sqrt{3})$$ (1) अंक

$$= \lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{x} \lim_{x \to o} (\sqrt{3-x} + \sqrt{3})$$ (1) अंक

$$= -\log_e 6 . (\sqrt{3-x} + \sqrt{3})$$ (1) अंक

$$= -2\sqrt{3} . \log_e 6 \quad (\text{जहाँ } \lim_{x \to o} \frac{6^x-1}{x} = \log_e 6)$$

अतः $\lim_{x \to o} \frac{6^x - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}} = -2\sqrt{3} \log_e 6$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....12

अथवा OR

वाम हस्त सीमा

$\lim_{n \to o} f(x) = \lim_{h \to o} f(o-h) = \frac{1 - \cos(-h)}{(-h)^2}$ (1) अंक

$= \lim_{h \to o} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \lim_{h \to o} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2}$ (1) अंक

$= 2 \lim_{h \to o} \left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{2}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$ (1) अंक

दक्षिण हस्त सीमा $= \lim_{x \to o^+} f(x)$

$= \lim_{h \to o} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2} = 2\lim_{h \to o} \left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2 \times \frac{1}{4}$ (1) अंक

$= \frac{2}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$ $f(o) = \frac{1}{2}$

'.' $\lim_{x \to o} f(x) = f(o) = \lim_{x \to o} f(x)$

अतः फलन x = o पर संतत है । (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.16 का हल

$\int \sec^3 x \, dx$

माना $I = \int \sec^3 x \, dx$

$I = \int \sec x \sec^2 x \, dx$

$I = \sec x \int \sec^2 x \, dx - \int \frac{d}{dx}(\sec x) \int [\sec^2 x \, dx] dx$

(1)अंक

$I = \sec x \tan x - \int \sec x \tan x \tan x \, dx$

$I = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$ (1) अंक

$I = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$

$I = \sec x \tan x - I + \log(\sec x + \tan x)$ (1) अंक

$2I = \sec x \tan x + \log(\sec x + \tan x)$

$I = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \log(\sec x + \tan x)]$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

□

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}\ dx$$

हल :– $\cos^2 x$ **का भाग हर तथा अंश में देने पर**

$$I = \int \frac{\sec^2 x\ dx}{\sec^2 x + 1}$$ (1) **अंक**

Cont.....13

---13---

$$= \int \frac{\sec^2 x\ dx}{\tan^2 x + 2}$$ **माना** $\tan x = t$ (1) **अंक**

$$\sec^2 x\ dx = dt$$

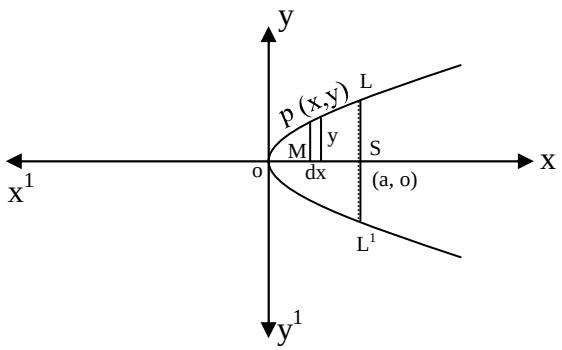
$$= \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{2})^2}$$ (1) **अंक**

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c$$ (1) **अंक**

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$$ (1) **अंक**

(**कुल** 1+1+1+1+1 = 5 **अंक**)

उ.17 का हल



(1) **अंक**

परवलय $y^2 = 4ax$, x **अक्ष के परितः समामित है ।**

इसका नाभिलम्ब समीकरण $x = a$ **है ।** (1) **अंक**

वक्र पर कोई बिन्दु p (x,y) **है, यहाँ पट्टी** PM **का क्षेत्रफल** ydx **होगा ।** x **का मान** o **पर शून्य तथा** s **पर** a **होगा ।**

'.' अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × OSL **का क्षेत्रफल** (1) **अंक**

$$= 2\int_b^a y\,dx$$

$$= 2\int_b^a 2\sqrt{an}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\int_b^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_o^a$$ (1) **अंक**

$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\ a^{3/2}$$

$$\frac{8}{3}$$

= $.a^2$ d वर्ग इकाई (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}$

हल :– माना, $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$ ----- (i) समी.

Cont.....14

---14---

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ (1) अंक

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$ ----- (ii) समी.

सभी (1) व (11) को जोड़ने पर

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx$ (1) अंक

$2I = \int_0^{\pi/2} dx$

$2I = \left[x \right]_0^{\pi/2}$ (1) अंक

$2I = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.18 का हल

$x + y \frac{dy}{dx} = 2y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{y}$ (1) अंक

माना $y = vx \rightarrow \frac{dv}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ (1) अंक

$v + x.\frac{dv}{dx} = \frac{2v - 1}{v}$

$x \frac{dv}{dx} = \frac{2v - 1}{v} - v$ (1) अंक

समाकलन करने पर

$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{v\, dv}{(v-1)^2}$

$\log x = -\log (v-1) + \frac{1}{(v-1)} + c$ (1) अंक

$\log x = \log (v-1) = \frac{1}{(v-1)} + c$

$\frac{1}{y,}$

$$\log\left\{x\left[\frac{y}{x}-1\right]\right\} = \left(\quad -1\right)$$

$$\log(y-x) = \frac{x}{y-x} + c \qquad \text{(1) अंक}$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....15

अथवा OR

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x \qquad \text{----- (i) समी.}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \tan x\,dx} = \sec x \qquad \text{(2) अंक}$$

sec x का गुणा समी (i) में करने पर

$$\sec x\frac{dy}{dx} + y\tan x\sec x = \sec^2 x \qquad \text{(1) अंक}$$

$$\frac{dy}{dx}(y\sec x) = \sec^2 x$$

$$y\sec x = \int \sec^2 x\,dx + c \qquad \text{(1) अंक}$$

$$y\sec x = \tan x + c$$

$$y = \sin x + c\cos x \qquad \text{(1) अंक}$$

(कुल 2+1+1+1 = 5 अंक)

उ.19 का हल

कुल नग $50 + 150 = 200$

इनमें आधे में जंग लगी हुई है

अतः जंग लगे नग = 100 हुए

जंग लगे बोल्ट $= \frac{50}{2} = 25$

मान लीजिए घटना A = जंग लगा नग होना

घटना B = बोल्ट होने की घटना । (1) अंक

घटनाऐं A और B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं ।

'.' P(A या B) = P (A) + P (B) - P (A और B) (1) अंक

$$= \frac{100}{200} \times \frac{50}{200} - \frac{25}{200} \qquad \text{(2) अंक}$$

$$= \frac{125}{200} = \frac{5}{8}$$

'.' अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{5}{8}$ (1) अंक

(कुल 1+1+2+1 = 5 अंक)

अथवा OR

भिन्न रंग निम्नप्रकार से प्राप्त किये जा सकते हैं ।

(A) लाल, सफेद, $P(A) = \frac{3\times4}{12c_2}$ (1) अंक

(B) लाल, नीली, $P(B) = \frac{3\times5}{12c_2}$ (1) अंक

Cont.....16

(C) नीली, सफेद, $P(C) = \frac{4\times5}{12c_2}$ (1) अंक

चूंकि सभी स्थितियाँ अपवर्जी हैं

अतः अभीष्ट प्रायिकता

$P(A \text{ या } B \text{ या } C) = P(A) + P(B) + P(C)$ (1) अंक

$$= \frac{12 + 15 + 20}{12_{c_2}}$$

$$= \frac{47 \times 2}{12 \times 11}$$

$$= \frac{47}{66}$$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

उ.20 का हल

मानलो बिन्दु A,B,C के निर्देशांक

(O,O,O), (a,b,c) तथा (O,O,C) है ।

गोला बिन्दु A,B,C के अतिरिक्त मूल्य बिन्दु (O,O,O) से भी जाता है । अतः

= बिन्दु O, A, B, C से होकर जाने वाले गोले का समीकरण (1) अंक

$x^2+^{y2}+z^0 - ax - by - cz = o$ --- (i) समी. (1) अंक

गोले (1) की त्रिज्या $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = K$ (ज्ञात)

∴ वर्ग करने पर $a^2 + b^2 + c^2 = 4k^2$ --- (i) समी. (1) अंक

यदि (α, β, γ) ΔABC के केन्द्रक के निर्देशांक हो तब

$$\alpha = \frac{1}{3}a, \quad \beta = \frac{1}{3}b, \quad \gamma = \frac{1}{3}c$$

∴ $a = 3\alpha, \ b = 3\beta, \ c = 3\gamma$ (1) अंक

a, b, c का मान समीकरण (2) में रखने पर

$(3\alpha)^2 + (3\beta)^2 + (3\gamma)^2 = 4k^2$

$\therefore\ 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 9\gamma^2 = 4k^2$ (1) अंक

अतः बिन्दु (α, β, γ) का बिन्दु पक्ष अभीष्ट गोला होगा

$9(x^2+y^2+z^2) = 4k^2$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

Cont.....17

अथवा OR

माना कि गोले की त्रिज्या a है ।

चुंकि गोला निर्देशांक्ष समलकों से स्पर्श करता है । इसलिए गोले का केन्द्र (a, a, a) है । (1) अंक

अतः गोले का समीकरण होगा

$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$ (1) अंक

$\longrightarrow\ x^2+y^2+z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 3a^2 = a^2$

$\longrightarrow\ x^2+y^2+z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2 = 0$ ---(1) (1) अंक

चूंकि गोला बिन्दु (1,1,2) से होकर जाता है इसलिए

$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 - 2a.I. - 2a.1 - 2a.2 + 2a^2 = 0$ (1) अंक

$\longrightarrow\ 2a^2 - 2a - 2a - 4a + 1 + 1 + 4 = 0$

$\longrightarrow\ 2a^2 - 8a + 6 = 0$

$\longrightarrow\ (a-1)(a-3) - 0$

$a = 1,\ a = 3$

समीकरण (1) में $a = 1$, एवं $a = 3$ (1) अंक

रखने पर

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\ 2y - 2z + 2 = 0$

एवं $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 18 = 0$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

उ.21 का हल

दिए गये समतल का समीकरण

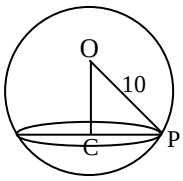
$\vec{r}.(2 + 2j + 2k) = 18$ ..... (1)

गोले का समीकरण $|r| = 10$ ..... (2)

गोले के केन्द्र का निर्देशांक (O,O,O) (1) अंक

गोले की त्रिज्या $\overrightarrow{OP} = 10$ (1) अंक

गोले (2) के केन्द्र O से समतल (1) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई



चित्र का (1) अंक

$$\overrightarrow{OC} = \left| \frac{(O2 + Oj + Ok) \cdot (2 + 2j + 2k) - 18}{\sqrt{1+4+4}} \right|$$ (1) अंक

$$= \left| \frac{-18}{3} \right| = 6$$ (1) अंक

Cont.....18

समकोण ΔOCP में पाइथागोरस प्रयेय से

$$\overrightarrow{CP} = \sqrt{\overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OC}^2}$$

$$= \sqrt{100 - 36}$$

$$= \sqrt{64}$$

$$= 8$$ (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

अथवा OR

दी गई रेखाओं के समीकरण

$\vec{r} = 4i - 3j - k + \lambda (i + 4j + 7k)$ ..... (i) समी.

$\vec{r} = i - j - 10k + \lambda_1 (2i - 3j + 8k)$ ..... (ii) समी.

यहाँ $\vec{a}_1 = 4i - 3j - k$, $\vec{b}_1 = i - 4j + 7k$ (1) अंक

$\vec{a}_2 = i - j - 10k$, $\vec{b}_2 = 2i - 3j + 8k$ (1) अंक

$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (i - j - 10k) - (4i - 3j - k)$

$= -3i + 2j - 9k$ (1) अंक

रेखा (1) व (2) एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेंगे यदि

$[\vec{a}_2 - \vec{a}_1 \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2] = 0$ (1) अंक

अतः LHS $[\vec{a}_2 - \vec{a}_1 \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 1 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$ (1) अंक

$$= (-3)(-32 + 21) - 2(8-14) + (-9)(-3 + 8)$$

$$= (-3)(-11) - 2(-6) + (-9)(5)$$

$= \quad 33 + 12 - 45$

$= \quad 45 - 45$

$= \quad 0$

अतः रेखाऐं (i) व (ii) प्रतिच्छेदी हैं । ---- (1) अंक

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

* * * * * * * * *