प्रादर्श प्रश्न-पत्र

MODEL QUESTION PAPER

उच्च गणित

HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे	कक्षा . 12वीं	पूर्णांक : 100
Time : 3 hours	**Class - XIIth**	**M.M. : 100**

निर्देश :–

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
2. प्रश्न पत्र में दिये गये निर्देश सावधानी पूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. प्रश्न पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं – खण्ड–अ और खण्ड–ब ।
4. खण्ड–अ में दिये गये प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, जिसके अन्तर्गत रिक्त स्थानों की पूर्ति, सत्य/असत्य, सही जोड़े बनाना, एक शब्द में उत्तर तथा सही विकल्प वाले प्रश्न हैं । प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है ।
5. खण्ड–ब में प्रश्न क्रमांक – 06 से 21 तक में आंतरिक विकल्प दिये गये हैं ।
6. प्रश्न क्रमांक – 06 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आवंटित हैं ।
5. प्रश्न क्रमांक – 13 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आवंटित हैं ।
6. प्रश्न क्रमांक – 20 से 21 तक प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आवंटित हैं ।

Instructions :-

1. All questions are compulsory.
2. Read the Instructions of question paper carefully and write their answer.
3. There are two parts - Section-A and Section-B in the question paper.
4. In Section-A Question No. 1 to 5 are Objective type, which contain Fill up the blanks, True/False, Match the column, One word answer and Choose the correct answer. Each question is alloted 5 marks.
5. Internal options are given in Question No. 06 to 21 of Section-B.
6. Question No. 06 to 12 carry 4 marks each.
7. Question No. 13 to 19 carry 5 marks each.
8. Question No. 20 to 21 carry 6 marks each.

(खण्ड–अ)
(Section-A)
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
(Objective Type Question)क

प्र.01 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर लिखिए ।

Write the correct answer from the given option provided in every objective type questions. **1+1+1+1+1 = 5**

Cont...2

(अ) यदि $\dfrac{3x}{(x-6)(x+a)} = \dfrac{2}{(x-6)} + \dfrac{1}{(x+a)}$ तो a का मान होगा :–

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

(A) If $\dfrac{3x}{(x-6)(x+a)} = \dfrac{2}{(x-6)} + \dfrac{1}{(x+a)}$ then the value of a is :-

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

(ब) यदि $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}A$ तो A का मान होगा :–

(i) x - y (ii) x + y (iii) $\dfrac{x-y}{1+xy}$ (iv) $\dfrac{x-y}{1+xy}$

(B) If $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}A$ then A the value of A is :-

(i) x - y (ii) x + y (iii) $\dfrac{x-y}{1+xy}$ (iv) $\dfrac{x-y}{1+xy}$

(स) बिन्दु (2, 1, 4) की y- अक्ष से दूरी है :

(i) $\sqrt{20}$ (ii) 1 (iii) $\sqrt{12}$ (iv) $\sqrt{10}$

(C) Distance of the point (2, 1, 4) from y- axis is :

(i) $\sqrt{20}$ (ii) 1 (iii) $\sqrt{12}$ (iv) $\sqrt{10}$

(द) अक्षों से (2 , 3 -4) के अंतः खण्ड करने वाले समतल का समीकरण है :

(i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 0$ (ii) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1$

(iii) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = -1$ (iv) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-3} - \dfrac{z}{4} = 1$

(D) The equation of the plane which intercepts (2, 3, -4) from the coordinate axes is :

(i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 0$ (ii) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1$

(iii) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = -1$ (iv) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-3} - \dfrac{z}{4} = 1$

(इ) $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के स्थिति सदिश क्रमशः 2i - 9j - 4k और 6i - 3j + 8k है तो $|\overrightarrow{AB}|$ का परिमाण है :

(i) 11 (ii) 12 (iii) 13 (iv) 14

(E) The position vectors of $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are 2i - 9j - 4k and 6i - 3j + 8k respectively then the magnitude of $|\overrightarrow{AB}|$ is :

(i) 11 (ii) 12 (iii) 13 (iv) 14

Cont...3

प्र.02 निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइये : **1+1+1+1+1 = 5**

(i) त्रिभुज की तीन माध्यिका द्वारा निर्धारित सदिशों का योग शून्य होता है :

(ii) यदि $\vec{a} = 2i + 3j - 4k$ तथा $\vec{b} = i + 2j + 4k$ है तो $\vec{a}.\vec{b}$ का मान शून्य होगा।

(iii) सहसम्बन्ध गुणांक का मान -1 और +1 के मध्य होता है ।

(iv) e^{ax} का n वां अवकलन है $a^n e^{ax}$

(v) सहसम्बन्ध गुणांक तथा समाश्रयण गुणाकों bxy तथा byx में सम्बन्ध r = bxy . byx होता है ।

Write True/False in the following statements :

(a) The sum of three vectors determined by the medians of a triangle directed from the vectors is zero.

(b) If $\vec{a} = 2i + 3j - 4k$ and $\vec{b} = i + 2j + 4k$ then the value of $\vec{a}.\vec{b}$ will be zero.

(c) The value of co-relation coefficient lies between -1 and +1.

(d) The n^{th} derivative of e^{ax} is $a^n e^{ax}$

(e) The relation between correlation coerfficient r and the regression coefficients bxy and byx is r = bxy . byx.

प्र.03 सही जोड़ी बनाइये : **1+1+1+1+1 = 5**

	(अ)		(ब)
(अ)	$\int a^x dx$	(i)	$\frac{x^2}{2}$
(ब)	$\int_o^a f(x) dx$	(ii)	$\frac{a^x}{\log a}$
(स)	$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b) dx$	(iii)	log (secx + tanx)
(द)	$\int e^{\log_e x} dx$	(iv)	$\int_o^a f(a-x) dx$
(ई)	$\int \sec x \, dx$	(v)	$\frac{-1}{a} \cot(ax+b)$
		(vi)	$\sin^{-1} \frac{x-2}{3}$
		(vii)	$\frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$

Match the column :

	(A)		(B)
(a)	$\int a^x dx$	(i)	$\frac{x^2}{2}$
(b)	$\int_o^a f(x) dx$	(ii)	$\frac{a^x}{\log a}$
(c)	$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b) dx$	(iii)	log (secx + tanx)

Cont...4

(d) $\int e^{\log_e x}\, dx$ (iv) $\int_0^a f(a-x)\, dx$

(e) $\int \sec x\, dx$ (v) $\frac{-1}{a} \cot(ax+b)$

(vi) $\sin^{-1} \frac{x-2}{3}$

(vii) $\frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$

प्र.04 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :– **1+1+1+1+1 = 5**

(i) गोले $(x-2)(x+2) + (y-3)(y+3) + (z-4)(z+4) = 0$ का केन्द्र (0,-0,0) तथा त्रिज्या .... है ।

(ii) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{5}$ सरल रेखा बिन्दु .... से होकर जाती है ।

(iii) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल .... है ।

(iv) यदि $y = \cos x$ हो तो y का n वाँ अवकलन .... होगा ।

(v) एक चर त्रिज्या वाले गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या 3 से.मी. है उसके आयतन परिवर्तन की दर .... होगी ।

Fill in the blanks :-

(a) If centre of the sphere $(x-2)(x+2) + (y-3)(y+3) + (z-4)(z+4) = 0$ is (0,-0,0) then its radius is ....

(b) Straight line $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{5}$ passes through the point ....

(c) Cross product of two vector $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is ....

(d) If $y = \cos x$ then the n^{th} differentiation of y will be ....

(e) A spherical Balloon having a variable radius of 3 c.m. then the rate of change of volume will be ....

प्र.05 निम्न प्रश्नों में प्रत्येक का उत्तर एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए: 1+1+1+1+1 = 5

(i) 0.23452 E 07 + 0.31065 E 07 का मान लिखिए ।

(ii) आंकिक विधियों में समलम्ब चतुर्भुज विधि का सूत्र लिखिये ।

(iii) सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए ।

(iv) न्यूटन रैफसन विधि द्वारा किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र लिखिये ।

(v) समीकरण $f(x) = 0$ के एक मूल का द्वितीय सन्निकटन मान लिखिये (जहाँ x_0, x_1 क्रम से प्रारँभिक तथा प्रथम सन्निकटन है) :

Write the answer of following questions in one word/sentence.

(a) Write the value of 0.23452 E 07 + 0.31065 E 07

(b) Write down the formula of Trapezoidal rule in Numerical method.

(c) Write down the formula of Simpson's one third rule.

Cont...5

(d) Write down the formula of Newton Raphson method to find out the square root of a number.

(e) By False positioning write the second approximation of a root of equation $f(x) = 0$ (where x_0, x_1 are intial and first approximations respectively.

(खण्ड–ब)

(Section-B)

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Very Short Answer type Question)

प्र.06 $\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ **को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिए ।** **04**

Express $\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ **into partial fraction.**

अथवा OR

$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ **को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिए ।**

Express $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ **into partial fraction**

प्र.07 सिद्ध कीजिए : **04**

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Prove that :

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

Prove that :

$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

प्र.08 यदि $x^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए कि : **04**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$, then prove that :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

Cont...6

अथवा OR

यदि $y = \cos x^{\cos x^{\cos x ....oo}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $y = \cos x^{\cos x^{\cos x ....oo}}$ then find the value of $\frac{dy}{dx}$

प्र.09 **$\cot^{-1}x$ का प्रथम सिद्धांत से अवकलन ज्ञात कीजिए ।** **04**

Differentiate $\cot^{-1}x$ by first principle.

अथवा OR

$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ को $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकलित कीजिए ।

Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ w.r.t. $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

प्र.10 **हवा के बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ सेमी. प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ रही है । त्रिज्या 1 सेमी. होने पर बुलबले की आयतन परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।** **04**

The radius of an air bubble is increasing at the rate of $\frac{1}{2}$ cm. per second. At what rate the volume of the bubble is increasing when the radius is 1 cm.

अथवा OR

एक कण एक सरल रेखा में गति कर रहा है । समय t सेकेण्ड पर उसके द्वारा तय की गई दूरी x (मीटर में) सम्बन्ध $x = 4t^3 + 2t^2$ से दी जाती है । 4 सेकण्ड के बाद कण का वेग एवं त्वरण ज्ञात कीजिए ।

A particle is moving in a straight line. The distance x (in metres) traveled by it in time t is given by the relation $x = 4t^3 + 2t^2$. Find the velocity and acceleration of the particle after 4 seconds.

प्र.11 **यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच कोण θ हो तो सिद्ध कीजिए :** **04**

$$\tan\theta = \left|\frac{\square_x \cdot \square_y}{\square_x^2+\square_y^2}\right| \left|\frac{P^2-1}{P}\right|$$

If angle between two regression lines is θ then prove that

$$\tan\theta = \left|\frac{\square_x \cdot \square_y}{\square_x^2+\square_y^2}\right| \left|\frac{P^2-1}{P}\right|$$

अथवा OR

निम्नांकित सारणी द्वारा ग्वालियर में 70 रू. मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक उचित मूल्य ज्ञात कीजिए ।

	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	65	67
मानक विचलन	2.5	3.5

दो नगरों में वस्तु के मूल्यों में सहसम्बंध गुणांक 0.8 है ।

An article cost Rs. 70. at Gwalior. Find the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data :

	Gwalior	Bhopal
Mean Value	65	67
Standard Deviation	2.5	3.5

The correlation between the values of the two cities is 0.8.

प्र.12 दो चर राशियाँ x और y का सह सम्बन्ध P है, तो सिद्ध कीजिए :– **04**

$$P = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

जहाँ σ_x^2 , σ_y^2 तथा σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y और (x-y) के प्रसरण गुणांक है ।

If x and y are two variables and P is the coefficient of correlation between them, then show that

$$P = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

Where σ_x^2 , σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are the variances of x, y and (x-y) respectively.

अथवा OR

निम्नांकित आँकड़ों के लिए सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	15	16	14	13	11	12	10	8	9

Calculate the coefficient of correlation from the following data.

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	15	16	14	13	11	12	10	8	9

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Question) (5 Marks Each)

प्र.13 एक रेखा घन के विकर्णों के साथ α, β, γ, δ कोण बनाती है । दर्शाइए कि **05**

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

A line makes angles α, β, γ, δ with diagonals of a cube. Show that

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

Cont...8

अथवा OR

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (-1, 1, 1) एवं (1, -1, 1) से गुजरता है तथा समतल $x + 2y + 2z = 5$ पर लम्ब है ।

Find the equation of the plane passing through the points (-1, 1, 1) and (1, -1, 1) perpendicular to the plane $x + 2y + 2z = 5$

प्र.14 सदिश विधि से सिद्ध करो कि **05**

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Prove by vector method that

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

अथवा OR

यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हो, तो $2\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}+2\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ then find the angle between $2\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}+2\vec{b}$

प्र.15 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए । **05**

Find the value of $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

अथवा OR

निम्नांकित फलन की $x = 0$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिए ।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & : x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

Discuss the continuity of the following at $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & : x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

प्र.16 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए । **05**

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Evaluate :

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Cont...9

अथवा OR

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

find the whole area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$

प्र.17 निश्चित समाकलन के प्रगुणों का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए । **05**

$$\int_{o}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Using properties of definite integrals prove that :

$$\int_{o}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

अथवा OR

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$$

Evaluate :

$$\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$$

प्र.18 अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

अथवा OR

अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$\cos^3 x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x$$

Solve the differential equation :

$$\cos^3 x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x$$

प्र.19 एक थैले में 6 लाल, 4 सफेद और 5 नीली गेंदे हैं । यदि थैले में से एक–एक करके गेंदे निकाली जायें तथा उन्हें वापस थैले में न रखा जाये तो पहली के लाल, दूसरी के सफेद तथा तीसरे के नीले होने की क्या प्रायिकता है ।

Three balls are drawn successively from a bag (urn) containing 6 red balls, 4 white balls and 5 blue balls. Find the probability that these are drawn in the order red, white and blue, if each ball is not replaced.

अथवा OR

1 से 12 तक अंकित टिकटों को मिला दिया गया और एक टिकट यादृच्छया खींची गई । उस पर लिखी संख्या के 2 या 3 के गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

Tickets printed from 1 to 12 are shuffled and a ticket is drawn randomly. Find the probability of being written numbers on them as multiples of 2 or 3.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Question) (6 Marks Each)

प्र.20 बिन्दु (2, -1, 5) से रेखा $\frac{x-11}{10} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+8}{-11}$ पर खींचे गए, लम्ब का पाद तथा लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

Find the foot of the perpendicular drawn from the point (2, -1, 5) to the line $\frac{x-11}{10} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+8}{-11}$. Find also the length of the perpendicular.

अथवा OR

दर्शाइये कि रेखाओं $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$ प्रतिच्छेद करती है । इनका प्रतिच्छेद बिन्दु एवम् समतल का समीकरण जिसमें यह बिन्दु स्थित है, ज्ञात कीजिये ।

Show that the lines $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ and $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$ intersection each other. Find the point of intersection and the plane in which they lie.

Cont...10

प्र.21 **सरल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जिनके सदिश समीकरण निम्नानुसार हैं :–**

$\vec{r} = 3i + 8j + 3k + \lambda (3i + j + k)$ और

$\vec{r} = -3i - 7j + 6k + \mu (-3i + 2j + 4k)$

Find the shortest distance between two lines, whose vector equations are :-

$\vec{r} = 3i + 8j + 3k + \lambda (3i + j + k)$ and

$\vec{r} = -3i - 7j + 6k + \mu (-3i + 2j + 4k)$

अथवा OR

एक समतल अचर बिन्दु (a,b,c) से गुजरता है और अक्षों को A,B,C पर काटता है । सिद्ध कीजिए कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दु पथ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ है ।

A plane passes through a fixed point (a,b,c) and cuts the axes at A,B,C show that the locus of the centre of the sphere OABC is :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

††††††††††

आदर्श उत्तर

MODEL ANSWER

उच्च गणित

HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे	कक्षा . 12वीं	पूर्णांक : 100
Time : 3 hours	Class - XIIth	M.M. : 100

प्र.01 का हल — प्रत्येक सही पर (1) अंक

(अ) (iii) 3 — 1

(ब) (iii) $\frac{x - y}{1+xy}$ — 1

(स) (i) $\sqrt{20}$ — 1

(द) (ii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1$ — 1

(इ) (iv) 14 — 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.02 का हल — प्रत्येक सही पर (1) अंक

(vi) सत्य — 1

(vii) असत्य — 1

(viii) सत्य — 1

(ix) सत्य — 1

(x) असत्य — 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.03 का हल — प्रत्येक सही पर (1) अंक

(अ) (ii) $\frac{a^x}{\log a}$ — 1

(ब) (iv) $\int_o^a f(a-x)\, dx$ — 1

(स) (v) $\frac{-1}{a} \cot(ax+b)$ — 1

(द) (i) $\frac{x^2}{2}$ — 1

(ई) (iii) log (secx + tanx) — 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.04 का हल — प्रत्येक सही पर (1) अंक

(vi) त्रिज्या = $\sqrt{29}$ — 1

(vii) (-1, 1, -4) — 1

(viii) $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$ — 1

(ix) $\cos\left(n\frac{\pi}{a} + x\right)$ — 1

(x) 36π घन सेमी. प्रति सेकण्ड । — 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....2

प्र.05 का हल — **प्रत्येक सही पर (1) अंक**

(vi)	0.54517 E 07	1
(ii)	$\frac{h}{3}[y_0+2(y_1+y_2+.........+y_{n-1}) + y_n]$	1
(iii)	$\frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5+........+y_{n-1}+2(y_2+y_4+.........+y_{n-2})+y_n]$	1
(iv)	$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{N}{x_n})$	1
(v)	$\frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_o)}{f(x_1) - f(x_o)}$	1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.06 का हल

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} \qquad \text{-------- (i)}$$ 1

$2x + 3 = A(x-3) + B(x+1)$ ------- (ii)

समी. (ii) में $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$ रखने पर

$B = \frac{9}{4}$ 1

समी. (ii) में $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ रखने पर

$A = \frac{-1}{4}$ 1

A और B का मान समी. (i) में रखने पर

$$\therefore \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{9}{4(x-3)}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$\frac{2x+1}{(x-11)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+c}{(x^2+1)} \qquad \text{-------- (i)}$$ 1

$2x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+c)(x-1)$ ------- (ii)

समी. (ii) में $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ रखने पर

$A = \frac{3}{2}$ 1

समी. (ii) में x^2 के गुणांको की तुलना करने पर

$A + B = 0$

$B = -A$

$B = \frac{-3}{2}$ 1

समी. (ii) में $x = 0$ रखने पर

$C = \frac{1}{2}$ 1

A, B,C के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^1+1)} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{-3x+1}{2(x^2+2)}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....3

प्र.07 का हल

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$ 1

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{10}}{\frac{10-1}{10}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{7}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}\right)$$ 1

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{72}}{\frac{72-7}{72}}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{65}{65}\right)$$ 1

$$\Rightarrow \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$x = \tan\theta$ **रखने पर** 1

$$\tan\text{-}1\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$ 1

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2.\cos\theta/2}\right)$$ 1

$$\Rightarrow \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....4

प्र.08 का हल

यहाँ $x^y = e^{x-y}$

लघुगणक लेने पर 1

$$\log x^y = \log e^{x-y}$$

$$y \log x = (x-y) \log e$$

$$y \log x = x-y$$

$$y(\log x+1) = x$$

$$y = \frac{x}{1+\log x}$$ 1

अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x) . 1 - x \frac{1}{x}}{(1+\log x)^2}$$ 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\log x-1}{(1+\log x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$y = \cos x^{\cos x^{\cos x........oo}}$$

$$y = \cos x^y$$ 1

लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log \cos x^y$$

$$\log y = y \log \cos x$$ 1

अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = y (-\tan x) + \log \cos x . \frac{dy}{dx}$$ 1

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{y} - \log \cos x \right) = - y \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1-y \log \cos x}{y} \right) = - y \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-y^2 \tan x}{1-t \log \cos x} \right)$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....5

प्र.09 का हल

$$f(x) = \cot^{-1}x$$

तथा $f(x+h) = \cot^{-1}(x+h)$

हम जानते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\cot^{-1}(x+h) - \cot^{-1}x}{h}$$ 1

माना कि $\cot^{-1}x = t \Rightarrow x = \cot t$

$\cot^{-1}(x+h) = t + k \Rightarrow x+h = \cot(t+k)$

यदि $h \to o \Rightarrow k \to o$

$$= \lim_{k \to o} \frac{t + k - t}{\cot(t+k) - \cot t}$$ 1

$$= \lim_{k \to o} \frac{k}{\frac{\cos(t+k)}{\sin(t+k)} - \frac{\cos t}{\sin t}}$$

$$= \lim_{k \to o} \frac{k . \sin(t + k) . \sin t}{\cos(t+k).\sin t-\cos t.\sin(t+k)}$$

$$= \lim_{k \to o} \frac{k.\sin(t+k) . \sin t}{\sin(t-t-k)}$$ 1

$$= \lim_{k \to o} \left(\frac{k}{\sin k}\right) \sin(t+k) . \sin t$$

$$= -(1) . \sin t . \sin t$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 t}$$

$$= \frac{-1}{1+\cot^2 t}$$

$$= \frac{-1}{1+x^2}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

माना कि $u = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$; $v = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ रखने पर 1

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$$u = \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$

Cont.....6

$$u = 2\theta$$
$$u = 2\tan^{-1}x \qquad 1$$
$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$
$$v = \cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$
$$v = \cos^{-1}(\cos 2\theta)$$
$$v = 2\theta \qquad 1$$
$$v = 2\tan^{-1}x$$
$$\therefore \frac{dv}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$
$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$
$$= \frac{2/1+x^2}{2/1+x^2}$$
$$\therefore \frac{du}{dv} = 1 \qquad 1$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.10 का हल

मान लीजिए t समय पर बुलबुले की त्रिज्या r तथा आयतन v है तो

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 \qquad 1$$

प्रश्नानुसार त्रिज्या r का समय t के साथ परिवर्तन की दर

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \text{ सेमी / सेकण्ड} \qquad 1$$

हमें $\frac{dv}{dt}$ ज्ञात करना है

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \qquad 1$$
$$= 4\pi r^2 . \frac{1}{2}$$
$$= 2\pi r^2$$
$$\therefore \left(\frac{dv}{dt}\right)_{r=1} = 2\pi(1)^2$$
$$= 2\pi \text{ घन सेमी / सेकण्ड} \qquad 1$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

यहाँ $x = 4t^3 + 2t^2$

इसलिए वेग $v = \frac{dx}{dt} = 12t^2 + 4t$ ------- (i) 1

Cont.....7

और त्वरण $a = \frac{dx}{dt} = 24t + 4$ ------- (ii) 1

समीकरण (i) में $t = 4$ रखने पर,

$v = 12\,(4)^2 + 4\,(4)$

$v = 208$ मीटर / सेकण्ड 1

पुनः समीकरण (ii) में $t = 4$ रखने पर

$a = 24\,(4) + 4$

$a = 100$ मीटर / सेकण्ड ^{2} 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.11 का हल

y की x पर समाश्रयण रेखा का समी. है

$y-\bar{y} = byx\,(x-\bar{x})$

या $y = b_{yx}\; X + (\bar{y}-b_{yx}\bar{X})$

$\therefore$ इस रेखा की प्रवणता $m_1 = byx$ 1

x की y पर समाश्रयण रेखा का समी. है

$x-\bar{x} = bxy\,(y-\bar{y})$

या $Y = \frac{1}{bxy}\; x + \left(y - \frac{1}{bxy}\bar{x}\right)$

$\therefore$ इस रेखा की प्रवणता $m_2 = \frac{1}{bxy}$ 1

यदि दोनों रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ हो तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right| = \left|\frac{byx - \frac{1}{bxy}}{1+byx.\frac{1}{bxy}}\right|$$ 1

$$= \left|\frac{byx.bxy - 1}{bxy + byx}\right|$$

$$= \left|\frac{P.\frac{\square y}{\square x}.P.\frac{\square x}{\square y} - 1}{P.\frac{\square x}{\square y} + P.\frac{\square y}{\square x}}\right|$$

$$= \left|\frac{P^2 - 1}{P\left(\frac{\square x^2 + \square y^2}{\square x\;.\;\square y}\right)}\right|$$

1

$$\therefore\ \tan\theta = \left|\frac{\square x\;.\;\square y}{\square x^2 + \square y^2}\right| \left|\frac{P^2-1}{P}\right|$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....8

अथवा OR

यदि ग्वालियर और भोपाल के मूल्यों को क्रमशः चर x और y मानें तो

$\bar{x} = 65, \quad \bar{y} = 67, \quad \sigma_x = 2.5, \quad \sigma_y = 3.5, \quad P = 0.8$ 1

y की x पर समाश्रयण रेखा :

$$y - \bar{y} = \frac{P\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$ 1

$$y - 67 = \frac{0.8 \times 3.5}{2.5}(x-65)$$

$$= \quad y - 67 = \frac{28}{25}(x-65)$$

$$y = \frac{28}{25}x - \frac{28}{25}$$

यहाँ x = 70 के संगत y का मान ज्ञान करना है 1

$$y = \frac{28}{25} \times 70 - \frac{29}{5}$$

$$= \frac{392 - 29}{5} = \frac{363}{5} = 72.6$$

$$y = 72.6$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.12 का हल

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2$$

$$\sigma_{x-y} = \frac{1}{n}\Sigma[(x-y) - (\overline{x}-\overline{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma[(x-\bar{x}) - (y-\bar{y})]^2$$

1

$$= \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2 - 2.\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$ 1

$$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2P.\sigma_x.\sigma_y$$

$\because$ $\text{cov}(x_1y) = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

$$P = \frac{\text{cov}(x_1y)}{\sigma_x.\sigma_y}$$

$\text{cov}(x_1y) = P.\sigma_x.\sigma_y$ 1

$\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = P.\sigma_x.\sigma_y$

$$2P\sigma_x.\sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2$$

$$P = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x.\sigma_y}$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

Cont.....9

अथवा OR

हल

x	y	x^2	y^2	xy
9	15	81	225	135
8	16	64	256	128
7	14	49	196	98
6	13	36	169	78
5	11	25	121	55
4	12	16	144	48
3	10	9	100	30
2	8	4	64	16
1	9	1	81	9
45	108	285	1356	597

2

$$P(x_1y) = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{\sqrt{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$ 1

$$= \frac{9 \times 597 - 45 \times 108}{\sqrt{9 \times 285 - 45 \times 45}\ \sqrt{9 \times 1356 - 108 \times 108}}$$

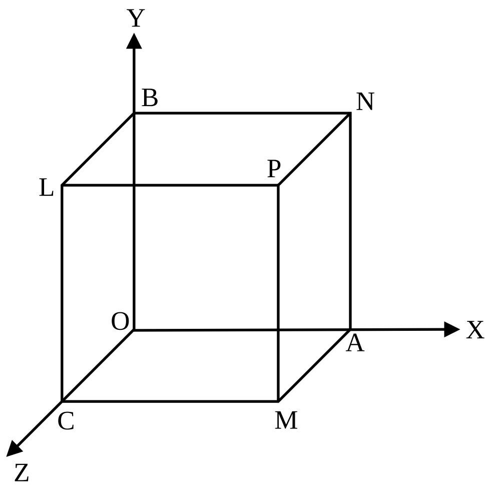
$$= \frac{513}{\sqrt{540}\ \sqrt{540}}$$

$$= \frac{513}{540}$$

$$P(x_1y) = 0.95$$ 1

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.13 का हल



1

Cont.....10

मान लीजिए कि OA, OB, OC एक घन की तीन संलग्न कोरें हैं जिन्हें अक्षों के अनुदिश लिया गया हे तथा

$$OA = OB = OC = a$$

तब घन के शीर्ष के निर्देशांक होंगे

O(o,o,o); A(a,o,o); B (o,a,o); C (o,o,a); P (a,a,a); L (o,a,a);
M (a,o,a); तथा N (a,a,o) 1

विकर्ण OP, AL, BM और CN के दिक् अनुपात क्रमशः (a,a,a); (-a,a,a); (a,-a,a) तथा (a,a,-a) होंगे

एवं इनकी दिक् कोज्याएँ

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ तथा $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ होंगे 1

मान लीजिए एक रेखा की दिक् कोज्याएँ (l,m,n) हैं जो इन विकर्णों से क्रमशः $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है । तब

$$\cos\alpha = \left(l.\frac{1}{\sqrt{3}} + m.\frac{1}{\sqrt{3}} + n.\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \left(l.\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + m.\frac{1}{\sqrt{3}} + n.\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \left(l.\frac{1}{\sqrt{3}} + m.\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + n.\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{l-m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\delta = \left(l.\frac{1}{\sqrt{3}} + m.\frac{-1}{\sqrt{3}} + n.\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{l+m-n}{\sqrt{3}}$$ 1

वर्ग करके जोड़ने पर, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$$= \frac{1}{3}\left[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4l^2 + 4m^2 + 4n^2\right]$$

$$= \frac{4}{3} \quad \{ \because l^2 + m^2 + n^2 = 1\}$$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

किसी बिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण है

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$ 1

अतः बिन्दु (-1,1,1) से गुजरने वाले किसी समतल का समीकरण :

$$a(x+1) + b(y-1) + c(z-1) = 0 \qquad \text{------- (i)}$$

Cont.....11

चूंकि यह (1,-1,1) से भी गुजरता है

$$a(1+1) + b(-1-1) + c(1-1) = 0$$

$$a - b + oc = 0 \qquad \text{------- (ii)}$$

समतल (i) दिए हुए समतल $x + 2y + 2z = 5$ पर लम्ब है

$$\therefore \; a \times 1 + b \times 2 + c \times 2 = 0$$

$$a + 2b + 2c = 0 \qquad \text{------- (ii)}$$ 1

(ii) व (iii) को हल करने पर

$$\frac{a}{-2} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{3} = k \quad \text{(माना)}$$

$$\therefore \; a = -2k \; ; \quad b = -2k \; ; \quad c = 3k$$ 1

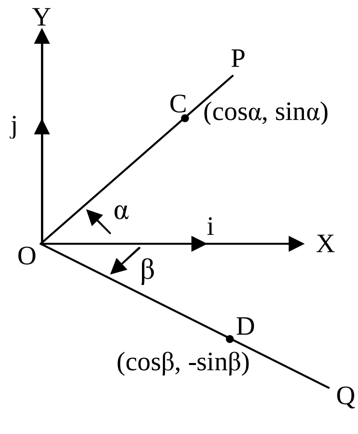
ये मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$$-2k(x+1) - 2k(y-1) + 3k(z-1) = 0$$

$$2x + 2y - 3z + 3 = 0$$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.14 का हल



1

मान लीजिए x- अक्ष और y- अक्ष के अनुदिशा i व j एकांक सदिश हैं, OX के साथ OP व OQ क्रमशः α व $-\beta$ कोण एक ही समतल में बनाते हैं जिससे

$$\angle POQ = \alpha + \beta$$

मान लीजिए कि OC व OD क्रमशः OP व OQ के अनुदिश एकांक सदिश हैं

C व D के निर्देशांक क्रमाशः $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ तथा $(\cos\beta, -\sin\beta)$ होंगे । 1

$|\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 1$

$\therefore\ \vec{OC} \cdot \vec{OD} = (1)(1)\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$ ------ (i) 1

Cont.....12

$\vec{OC} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\sin\alpha)\hat{j}$

$\vec{OD} = (\text{soc}\beta)\hat{i} - (\sin\beta)\hat{j}$

$\vec{OC} \cdot \vec{OD} = [(\cos\alpha)\hat{i} + (\sin\alpha)\hat{j}] \cdot [(\cos\beta)\hat{i} - (\sin\beta)\hat{j}]$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ------ (ii) 1

समीकरण (i) व (ii) से

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$2\vec{a} + \vec{b} = 2[\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}] + [3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}]$

$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{a} + 2\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2[3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}]$

$= 7\hat{i} + o\hat{j} + \hat{k}$ 1

$\therefore\ |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$

$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ 1

and $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (7\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k})$

$= 5.7 + 3.0 + (-4) . 1$

$= 31$ 1

माना सदिश $(2\vec{a} + \vec{b})$ तथा $(\vec{a} + 2\vec{b})$ के बीच का कोण θ है

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{(2\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}|\ |\vec{a}+2\vec{b}|}$ 1

$\cos\theta = \dfrac{31}{\sqrt{50}\ \sqrt{50}}$

$\cos\theta = \dfrac{31}{50}$

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{31}{50}$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.15 का हल

$\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\lim_{x \to o} \frac{\tan x - \quad . \cos x}{x^3} \qquad 1$$

$$\lim_{x \to o} \frac{\tan x\,(1-\cos x)}{x \,.\, x^2}$$

Cont.....13

$$\lim_{x \to o} \frac{\tan x\,(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{x \,.\, x^2\,(1+\cos x)} \qquad 1$$

$$\lim_{x \to o} \frac{\tan x}{x} \,.\, \frac{\sin^2 x}{x^2} \,.\, \frac{1}{1+\cos x} \qquad 1$$

$$\lim_{x \to o} \frac{\tan x}{x} \,.\, \lim_{x \to o} \frac{\sin^2 x}{x^2} \,.\, \lim_{x \to o} \frac{1}{1+\cos x} \qquad 1$$

$$1 \times 1 \times \frac{1}{1 \times 1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad 1$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

वाम हस्त सीमा :–

$$\lim_{x \to o} f(x)$$

$$= \lim_{x \to o} f(o-h)$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{1 - \cos(-h)}{(-h)^2}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{1 - \cos h}{h^2}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2} \qquad 1$$

$$= 2 \lim_{x \to o} \left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4} \times 1 \qquad 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

<u>**दक्षिण हस्त सीमा**</u> =

$$\lim_{x \to o^+} f(x)$$

$$= \lim \quad f(o+h)$$

$x \to o$

$$= \lim_{x \to o} \frac{1 - \cos h}{h^2}$$ 1

Cont.....14

$$= \lim_{x \to o} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2}$$

$$= 2 \lim_{x \to o} \left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$ 1

$$\because \lim_{x \to o^-} f(x) = \lim_{x \to o^+} f(x) = f(o)$$ 1

अतः फलन $x = o$ **पर संतत है ।** (**कुल** 1+1+1+1+1 = 5 **अंक**)

प्र.16 का हल

माना $\tan \frac{x}{2} = t$

$$\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx = dt$$

$$dx = \frac{2}{\sec^2 \frac{x}{2}} \, dt$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \, dt$$

$$= \frac{2\,dt}{1+t^2}$$ 1

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5+\frac{4\times 2t}{1+t^2}\right)} \qquad \left(\because \sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)$$ 1

$$= \int \frac{2dt}{5+5t^2+8t}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$ 1

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{\frac{3}{5}} \tan^{-1}\left(\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)$$ 1

$$\frac{2}{3} \qquad \left(\frac{5t+4}{3}\right)$$

$= \quad \tan^{-1}$

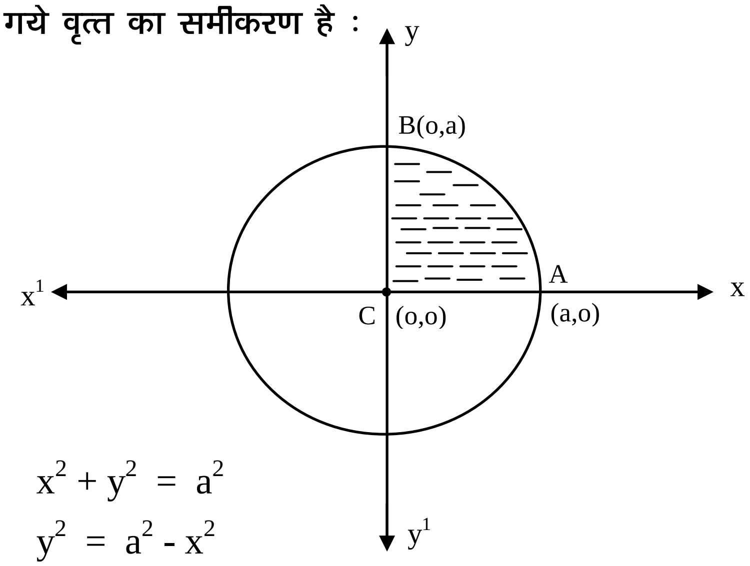
$$= \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{5\tan\frac{x}{2} + 4}{3}\right) + c$$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....15

अथवा OR

दिये गये वृत्त का समीकरण है :



1

$x^2 + y^2 = a^2$

$y^2 = a^2 - x^2$

$y = \sqrt{a^2-x^2}$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = 4 × क्षेत्र ABC का क्षेत्रफल 1

$$= 4 \int_o^a y\, dx$$

$$= 4 \int_o^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= 4 \left[\frac{x}{a} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} \right]_o^a$$

$$= 4 \left(\frac{a}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{a}{a} - \frac{a}{a} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2} \sin\text{-}^{1}\frac{o}{2} \right)$$ 1

$$= 4 \left(\frac{a^2}{2} \sin^{-1} - o \right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\ a^2 \sin^{-1} 1$$ 1

$$= 2a^2 \times \frac{\pi}{2}$$

$= \quad \pi a^2$ वर्ग इकाई 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.17 का हल

माना $I = \displaystyle\int_o^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$$\int_o^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}$$

$$I = \qquad dx$$ 1

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

Cont.....16

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} - I$$

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$ 1

माना $\cos x = t$ $\;- \sin x\, dx = dt$ **यदि** $x = 0$ **तब** $t = 1$ **और** $x = \pi$

तब $t = -1$ 1

$$2I = -\int_1^{-1} \frac{\pi\, dt}{1+t^2}$$

$$2I = \pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$2I = \pi \left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1}$$

$$2I = \pi \left[\tan^{-1} - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$2I = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$ 1

$$2I = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$$ 1

(**कुल** 1+1+1+1+1 = 5 **अंक**)

अथवा OR

$$= \int x2 \sin^{-1} x\, dx$$

$$= (\sin^{-1} x) \int x^2\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \sin^{-1} x \int x^2\, dx \right) dx$$ 1

$$= (\sin^{-1} x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2 . x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x \;\; \frac{1}{3} \int \frac{(1-t)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-dt}{2}\, dx$$

$1-x^2 = t$

$-2x dx = dt$

$x\, dx = \frac{-dt}{2}$ 1

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{1}{6} \left(\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt - \int \sqrt{t}\, dt \right)$$

$$\frac{x^3}{3} \qquad \frac{1}{6} \left(\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right)$$

$= \quad \sin^{-1}x + \quad \overline{} \quad \overline{}$ 1

$= \quad \frac{x^3}{3}\sin^{-1}x + \frac{1}{6}\left(2t^{1/2} - \frac{1}{6}t^{3/2}\right)$

Cont.....17

$= \quad \frac{x^3}{3}\sin^{-1}x + \frac{1}{3}\sqrt{t} - \frac{1}{9}t^{3/2}$ 1

$= \quad \frac{x^3}{3}\sin^{-1}x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} + c$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.18 का हल

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 5\left(\frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

माना $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 1

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 5v + 4v^2$ 1

$x\frac{dv}{dx} = 4v^2 + 5v + 1$

$x\frac{dv}{dx} = (2v+1)^2$

s

$\frac{dv}{(2v+1)^2} = \frac{dx}{x}$ 1

$\int \frac{dv}{(2v+1)^2} = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2(2v+1)} = \log x + \log c$ 1

अतः पुनः $v = \frac{y}{x}$ रखने पर

$\frac{-1}{2(2y+x)} = \log xc$

$xc = e^{\left(\frac{-x}{2(2y+x)}\right)}$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$\cos^3x \cdot \frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x$

$\frac{dy}{dx} + y\sec^2x = \tan x \cdot \sec^2x$ ------ (i)

मानक रेखीय अवकलन समीकरण

$\frac{dy}{dx} + py = Q$ से तुलना करने पर

$p = sec^2x$; $Q = tanx . sec^2x$ 1

Cont.....18

$I.F. = e^{\int pdx}$

$= \mathbf{e}^{\int sec^2x} = \mathbf{e}^{tanx}$ 1

समीकरण (i) को e^{tanx} से गुणा करने पर

$e^{tanx} . \frac{dy}{dx} + sec^2x.e^{tanx} . y = tanx . sec^2x.e^{tan}$

$\frac{d}{dx}(ye^{tanx}) = tanx . sec^2x,e^{tanx}$ 1

समाकलन से,

$ye^{tanx} = \int tanx . sec^2x.e^{tanx} dx + c$ ------ (ii)

माना $tanx = t$

$sec^2x\, dx = t$

$ye^{tanx} = \int te^t dt + c$

$= te^t - \int (1) e^t + c$

$= te^t - e^t + c$

$= e^t (ti1) + c$ 1

$ye^{tanx} = e^{tanx} (tanx-1) + c$

या $y = (tanx-1) + ce^{-tanx}$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Q.19 का हल

कुल गेंदे = 6 + 4 + 5 = 15 हैं, इनमें 6 लाल है

$\therefore$ पहली गेंद लाल होने की प्रायिकता $= \frac{6}{15}$ 1

अब थैले में 14 गेंदे रह गईं जिनमें 4 सफेद हैं

$\therefore$ दूसरी गेंद सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{4}{14}$ 1

अब थैले में 13 गेंद शेष रही जिनमें नीली गेंदे 5 हैं

$\therefore$ तीसरी गेंद नीली होने की प्रायिकता $= \frac{5}{13}$ 1

गुणन नियम से मिश्र प्रायिकता

$P(ABC) = P(A) P(B) P(C)$ 1

$= \frac{6}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{5}{13}$

$\frac{4}{91}$

$=$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{4}{91}$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont.....19

अथवा OR

माना प्रतिदर्श समिष्ट S **है, तब**

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$n(S) = 12$$

A = 2 **के गणज होने की घटना है, तब**

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \qquad n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12}$$ 1

B = 3 **के गुणज होने की घटना है, तब**

$$B = \{3, 6, 9, 12\}, \qquad n(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12}$$ 1

$$A \cap B = \{6, 12\}$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12}$$ 1

2 **या** 3 **के गुणज होने कर प्रायिकता**

$$= P(AUB) = P(A) + P(B) = P(A \cap B)$$ 1

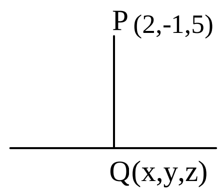
$$= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12}$$

$$= \frac{2}{3}$$ 1

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Q.20 का हल

मान लीजिए P(2, -1, 5) **से रेखा पर लम्ब** PQ **है**



1

लम्ब पाद Q **है जो रेखा**

$$\frac{x-11}{10} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+8}{-11} = k \quad \text{(माना)}$$ 1

पर स्थित है । मान लीजिए Q के निर्देशांक

$(10k + 11 ; \ -4k - 2 ; -11k - 8)$ तथा दी हुई रेखा के दिक् अनुपात $10, -4, -11$ है । 1

Cont.....20

अतः PQ के दिक् अनुपात होंगे

$10k + 9, \ -4k - 1, \ -11k - 13$

चूंकि PQ दी हुई रेखा पर लम्ब है,

$\therefore \ 10(10k+9) - 4(-4k-1) - 11(-11k-13) = 0$ 1

या $273k + 273 = 0$

या $k = -1$ 1

$\therefore$ Q के निर्देशांक

$10(-1) + 11, \ \ -4(-1) - 2, \ \ -11(-1) - 8$

या $(1, 2, 3)$ होंगे ।

$PQ = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (5-3)^2}$

$PQ = \sqrt{1 + 9 + 4}$

$PQ = \sqrt{14}$ 1

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

अथवा OR

$\because$ दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदी होने का प्रतिबंध

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$ 1

$$\therefore \begin{vmatrix} 0+1 & 7-3 & -7+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$1(4+3) - 4(-6-1) - 5(9-2) = 0$

$7 + 28 - 35 = 0$

$0 = 0$ 1

अतः रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं ।

Cont.....21

अब प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए दी हुई रेखा

$$\frac{x-11}{10} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+8}{-11} = k \quad \text{(माना)}$$

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक (-3k-1, 2k+3, k-2) 1

यदि रेखाएँ इस बिन्दु पर प्रतिच्छेदी हैं तो यह बिन्दु दूसरी दी हुई रेखा को भी संतुष्ट करेगा ।

$$\frac{-1k-1}{1} = \frac{2k+3-7}{-3} = \frac{k-2+7}{2}$$

हल करने पर $k = -1$ 1

अतः रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं तथा प्रतिच्छेद बिन्दु (2,1,-3) है उस समतल का समीकरण जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं :–

$$\begin{vmatrix} x+x & y-3 & z+z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$ 1

या $(x+1)(4+3) + (y-3)(1+6) + (z+2)(9-2) = 0$

हल करने पर

$x + y + z = 0$ 1

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

Q.21 का हल

$\vec{r} = (3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ------- (i)

$\vec{r} = (3\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$ ------- (ii) 1

समीकरण (i) से

$\vec{a}_1 = 3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k}, \; \vec{b}_1 = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

समी. (ii) से

$\vec{a}_2 = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}; \; \vec{b}_2 = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -3\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k} - (3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k})$ 1

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -6\hat{i} - 15\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Cont.....22

$$= \hat{i}(-4-2) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(6-3)$$

$$= -6\hat{i} - 15\hat{j} + 3\hat{k} \qquad 1$$

$$\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-15)^2 + 3^2} = \sqrt{270} \qquad 1$$

$$\text{न्यूनतम दूरी} = \left| \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| \qquad 1$$

$$= \left| \frac{(-6\hat{i}-15\hat{j}+3\hat{k}) \cdot (-6\hat{i}-15\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{270}} \right|$$

$$= \left| \frac{36 + 225 + 9}{\sqrt{270}} \right|$$

$$= \frac{270}{\sqrt{270}}$$

$$= \sqrt{270}$$

$$= 3\sqrt{30} \qquad 1$$

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

अथवा OR

मान लीजिए ABC समतल का समीकरण है

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \qquad 1$$

तब A,B,C के निर्देशांक क्रमशः

(α,o,o); (o,β,o); (o,o,γ) होंगे

'.' समतल बिन्दु (a,b,c) से गुजरता है

$$\therefore \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 1 \qquad \text{------- (i)} \qquad 1$$

मूल बिन्दु O से गुजरने वाले किसी समतल का समीकरण है

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz = O$$

परन्तु यदि यह बिन्दु $A(\alpha,o,o)$; $B(o,\beta,o)$; तथा $C(o,o,\gamma)$ से गुजरता है तो

$$\alpha^2 + 2u\alpha = O ; \quad \beta^2 + 2v\beta = O ; \quad \gamma^2 + 2w\gamma = O$$ 1

Cont.....23

$$u = \frac{-\alpha}{2} ; \quad v = \frac{-\beta}{2} ; \quad w = \frac{-\gamma}{2}$$

अतः OABC गोले का समीकरण है

$$a^2 + y^2 + z^2 - \alpha x - \beta y - \gamma z = O$$

जिसके केन्द्र के निर्देशांक के लिए $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$ 1

$$u = \frac{\alpha}{2} ; \quad v = \frac{\beta}{2} ; \quad w = \frac{\gamma}{2}$$

या $\alpha = 2x, \quad \beta = 2y ; \quad \gamma = 2z$ 1

ये मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{a}{2x} + \frac{b}{by} + \frac{c}{2z} = 1$$

या $$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

यीं अभीष्ट बिन्दु पथ है । 1

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

† † † † † † † † † †