

उच्च गणित

Set-C

(Higher Mathematics) (Hindi & English Version)

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

Time : 3 Hours

Maximum Marks: 100

निर्देश—

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
 2. प्रश्न 1 से प्रश्न 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न है।
 3. प्रश्न 6 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित है।
 4. प्रश्न 11 से 17 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित है।
 5. प्रश्न 18 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक निर्धारित है।
 6. प्रश्न 23 से 24 तक प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित है।
1. प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए।

5 × 1 = 5

Write the correct answer from the given options which provided in every objective type question.

(अ) आंशिक भिन्न $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ हो तो A और B के मान होंगे।

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (i) $A = 5, B = -7$ | (ii) $A = -5, B = -7$ |
| (iii) $A = -5, B = 7$ | (iv) $A = -3, B = 5$ |

(A) If partial fraction $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ then value of A and B :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (i) $A = 5, B = -7$ | (ii) $A = -5, B = -7$ |
| (iii) $A = -5, B = 7$ | (iv) $A = -3, B = 5$ |

(ब) यदि ΔABC का केन्द्रक G हो तो $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}$ बराबर होगा।

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| (i) $3\overline{GC}$ | (ii) $3\overline{GA}$ |
| (iii) $3\overline{GB}$ | (iv) $\vec{0}$ |

If G is the centroid of the triangle ΔABC then $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}$ is equals to.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| (i) $3\overline{GC}$ | (ii) $3\overline{GA}$ |
|----------------------|-----------------------|

(iii) $3\overline{GB}$

(iv) $\overline{0}$

(स) यदि $y = \log [\log (\log x)]$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा

(i) $\frac{1}{x \log x}$

(ii) $\frac{1}{x \log x \log \log x}$

(iii) $\frac{1}{x \log \log x}$

(iv) $\frac{1}{x}$

If $y = \log [\log (\log x)]$, then find value of $\frac{dy}{dx}$ is.

(i) $\frac{1}{x \log x}$

(ii) $\frac{1}{x \log x \log \log x}$

(iii) $\frac{1}{x \log \log x}$

(iv) $\frac{1}{x}$

(द) $\int \sec x \tan x dx$ का मान होगा।

(i) $\frac{1}{\sec x}$

(ii) $\frac{1}{\tan x}$

(iii) $\frac{1}{\cos x}$

(iv) $\operatorname{cosec} x$

Value of $\int \sec x \tan x dx$:

(i) $\frac{1}{\sec x}$

(ii) $\frac{1}{\tan x}$

(iii) $\frac{1}{\cos x}$

(iv) $\operatorname{cosec} x$

(इ) $\int x e^x dx$ का मान होगा।

(i) $\frac{e^x}{x}$

(ii) e^x

(iii) $e^x(x+1)$

(iv) $e^x(x-1)$

Value of $\int x e^x dx$:

(i) $\frac{e^x}{x}$

(ii) e^x

(iii) $e^x(x + 1)$

(iv) $e^x(x - 1)$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :

5 × 1 = 5

(अ) $3 \cos^{-1}x$ का मान है।

(ब) सदिश $(\hat{i} + \hat{j})$ के समानान्तर एकांक सदिश होता है।

(स) यदि $y = x^4$ हो तो उत्तरोत्तर अवकल गुणांक का मान होगा।

(द) $f(\theta) = a \sin\theta + b \cos\theta$ का महत्तम मान होता है।

(इ) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$ का मान है।

Fill in the blanks

(A) Value of $3\cos^{-1}x$ is

(B) The unit vector parallel to vector $(\hat{i} + \hat{j})$ is

(C) If $y = x^4$, then the successive differential coefficient is

(D) Maximum value of $f(\theta) = a \sin\theta + b \cos\theta$ is

(E) value of $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$ is

3. सही जोड़ी बनाइये (खण्ड 'अ' के लिए खंड 'ब' से सही उत्तर चुनिए)।

खंड 'अ'

खंड 'ब'

(अ) 2 का घनमूल दशमलव के (i) $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})$

तीन स्थान तक $2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$

(ब) न्यूटन रैफसन सूत्र (ii) 2.667

(स) सिम्सन नियम का सूत्र (iii) 1.258

(द) $n = 4$ लेकर सिम्पसन नियम से (iv) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\int_0^2 x^2 dx$ का सन्निकट मान

(इ) समलंब चतुर्भुजीय नियम (v) 1.25

(vi) $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$

$$\text{जहाँ } h = \frac{b-a}{n}$$

Column (A)

Column (B)

- | | | | |
|-----|--|-------|---|
| (A) | Cube root of 2 upto 3 places of decimal | (i) | $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$ |
| (B) | Newton's Raphson's formula | (ii) | 2.667 |
| (C) | Simpson's rule formula | (iii) | 1.258 |
| (D) | Approximate value of $\int_0^2 x^2 dx$ by simpson's rule cohen n = 4 | (iv) | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ |
| (E) | Trapezoidal rule | (v) | 1.25 |

$$(vi) \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]$$

$$\text{जहाँ } h = \frac{b-a}{n}$$

4. प्रत्येक का उत्तर एक वाक्य में लिखिए।
- (अ) तीन असमरेख बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण सारणिक रूप में लिखिए।
- (ब) दो समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के बीच का कोण $\cos \theta$ का मान क्या होगा ?
- (स) \vec{a} की दिशा में \vec{b} प्रक्षेप कितना होता है ?
- (द) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (इ) $\int \tan^{-1} x dx$ का मान होगा।

4. Write answers in one sentence each :

- (A) Write the equation of a plane passing through three non collinear points (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) and (x_3, y_3, z_3) in determinant form.
- (B) Write the angle $\cos \theta$ between two planes $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

(C) Write the projection or Scalar component of \vec{b} along \vec{a}

(D) Find the value of $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$

(E) Value of $\int \tan^{-1} \sqrt{x} dx$

5. सत्य अथवा असत्य लिखिए—

5 × 1 = 5

(अ) मूलबिन्दु से समतल $6x - 3y + 2z + 14 = 0$ की दूरी 2 है।

(ब) समतल $2x + 4y + 4z = 9$ के अभिलंब की दिक्कोज्ज्याएँ $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ है।

(स) सहसंबंध गुणांक का मान सदैव 2 होता है।

(द) सहसंबंध गुणांक और समाश्रयण गुणांक में कोई संबंध नहीं है।

(इ) अचर पद का समाकलन शून्य होता है।

State true / false :

(A) Distance of origin from plane $6x - 3y + 2z + 14 = 0$ is 2.

(B) Direction cosines of normal to the plane $2x + 4y + 4z = 9$ are $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$

(C) The value of coefficient of correlation is always 2.

(D) There is no relation between coefficient of correlation and regression coefficient.

(E) Integration of Constant is zero.

6. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ हो तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ then find $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

अथवा (Or)

सिद्ध कीजिए कि बिंदु A, B व C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ तथा $-7\vec{b} + 10\vec{c}$ है, संरेख है।

Show that the points A, B, C with Position vectors $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ तथा $-7\vec{b} + 10\vec{c}$ are collinear.

7. λ के किस मान के लिए \vec{a} और \vec{b} परस्पर लंब होंगे जबकि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \lambda\hat{k}$

2 अंक

Find λ such that \vec{a} are \vec{b} perpendicular to each other, where $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \lambda\hat{k}$

अथवा (or)

यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तो गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ then find the product $\vec{a} \times \vec{b}$.

8. सिद्ध कीजिए कि सदिश $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$ समतलीय है।

2 अंक

Prove that vectors $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$ are coplanar.

अथवा (Or)

दो सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between two vectors

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

9. $\int x^2 \sin 2x dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

2 अंक

Evaluate $\int x^2 \sin 2x dx$

अथवा (Or)

$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

10. $\int \sqrt{5+4x-x^2} dx$ के मान ज्ञात कीजिए।

2 अंक

Evaluate $\int \sqrt{5+4x-x^2} dx$

अथवा (Or)

$\int \sin^5 x \cos^3 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$

11. निम्नांकित भिन्न को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए।

4 अंक

$$\frac{16}{(x+2)(x^2-4)}$$

Resolve the following fraction into partial fraction

$$\frac{16}{(x+2)(x^2-4)}$$

अथवा (Or)

यदि $\frac{1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$ हो तो $A + B + C$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\frac{1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$ then find the value of $A + B + C$

12. सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

4 अंक

Prove that $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

अथवा (Or)

निम्न लिखित समीकरण हल कीजिए $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$

Solve the following equation

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

13. $\log_e x$ का अवकल गुणांक प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात कीजिए।

4 अंक

$\log_e x$ differentiate by first principle

अथवा

(Or)

यदि $y = \log \sqrt{\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $y = \log \sqrt{\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}}$ find $\frac{dy}{dx}$

14. यदि $y = \sqrt{\tan + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \dots \infty}}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{2y-1}$ 4 अंक

If $y = \sqrt{\tan + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \dots \infty}}}$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{2y-1}$

अथवा (Or)

निम्नांकित का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

$\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ का $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष

Find the differential coefficient of the following $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ w.r.t. $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$.

15. एक गुब्बारे की परिवर्तनशील त्रिज्या $\frac{3}{4}(2x+3)$ है। x के सापेक्ष इसके आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

A balloon has a variable radius of $\frac{3}{4}(2x+3)$. find the rate of change of volume.

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए कि

(i) $f(x) = \sin x$ अन्तराल $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ के लिए वर्धमान है।

(ii) $f(x) = \cos x$ अन्तराल $0 \leq x \leq \pi$ के लिए हासमान है।

Show that (i) $f(x) = \sin x$ is increasing for $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(ii) $f(x) = \cos x$ is decreasing for $0 \leq x \leq \pi$

16. निम्नांकित आँकड़ों के लिए कार्ल पियर्सन के गुणांक की गणना कीजिए। 4 अंक

पति की आयु	35	34	40	43	56	20	38
पत्नी की आयु	32	30	31	32	53	20	33

Calculate the Carl Pierson's from the following data .

Age of husband	35	34	40	43	56	20	38
Age of wife	32	30	31	32	53	20	33

अथवा (Or)

दो चर राशियों x और y का सहसंबंध गुणांक ρ है। तो सिद्ध कीजिए कि $\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$

जहाँ σ_x^2, σ_y^2 तथा σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y व $x-y$ के प्रसरण गुणांक हैं।

If x and y are two variables and ρ is the coefficient of correlation between them,

then show that $\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$ where σ_x^2, σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are the variances of

x, y and $x-y$ respectively.

17. निम्नलिखित आँकड़ों से y का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 12$. 4 अंक

श्रेणी	x	y
माध्य	7.6	14.8
मानक विचलन	3.6	2.5

सहसंबंध गुणांक $\rho = 0.99$

Estimate the value of y from the following data when $x = 12$

Series	x	y
Mean	7.6	14.8
S.D.	3.6	2.5

Coefficient of correlation $\rho = 0.99$

अथवा (Or)

निम्नलिखित आँकड़ों से समाश्रयण रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

x	2	4	6	8	10
y	6	5	4	3	2

Find the lines of regression from the following data.

x	2	4	6	8	10
y	6	5	4	3	2

18. दो रेखाओं के बीच कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ समीकरण $l + m + n = 0$ तथा $2l + 2m - mn = 0$ द्वारा प्राप्त की जा सकती हैं। 5 अंक

Find the angle between the two lines whose direction cosines are given by the equations $l + m + n = 0$ and $2l + 2m - mn = 0$

अथवा (Or)

सिद्ध कीजिए कि एक घन के विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

Prove that angle between two diagonal of a cube is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5 अंक

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$

अथवा (Or)

सिद्ध कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{जब } x < 1 \\ 2 & \text{जब } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{जब } x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ पर अंसतत है।

prove that $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ is discontinuous at $x = 1$

20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5 अंक

Evaluate $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$

अथवा (Or)

वक्र $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ और x अक्ष के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area bounded by the curve $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ and x - axis

21. निम्नांकित अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5 अंक

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

Solve the following differential equation

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

अथवा (Or)

निम्नांकित समघात समीकरण को हल कीजिए।

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

Solve the homogeneous equation.

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

22. 52 ताशों की फेंटी हुयी गड्डी में से एक के पश्चात् दूसरा, इस प्रकार दो कार्ड खींचे जाते हैं दोनों पान के कार्ड होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि खींचा गया कार्ड (अ) पुनः गड्डी में मिला

दिया जाता है (ब) नहीं मिलाया जाता है।

5 अंक

Find the probability of drawing two spades from A well shuffled pack of 52 cards if cards are drawn (a) with replacement (b) without replacement.

अथवा (Or)

एक पाँसे को तीन बार फेंकने में संख्याँ 6 आने की प्रायिकता वितरण ज्ञात कीजिए।

Find the probability distribution of the number of sixes in three throws of a dice.

23. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, 0, 0) (0, -1, 0) और (0, 0, -2) से गुजरे तथा

जिसका केन्द्र समतल $3x + 2y + 4z = 1$ पर स्थित हो।

6 अंक

Find the equation of the sphere passing through the points (3, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -2) and having the centre on the plane $3x + 2y + 4z = 1$.

अथवा (Or)

समान्तर रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ तथा $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-3}{8}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the distance between the parallel lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-2}{4} =$

$$\frac{y-3}{6} = \frac{z-3}{8}.$$

24. रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है।

6 अंक

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ तथा}$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \mu (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

Find the shortest distance between the lines whose vector equations are

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

अथवा (Or)

उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A (2, -3, 4) तथा B (-5, 6, -7) को मिलाने वाले रेखाखंड को व्यास मानकर खींचा गया है। गोले के समीकरण के कार्तीय रूप का निगमन कीजिए। गोले का केन्द्र एवं त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

Find the vector equation of a sphere described on the join of the points A (2, -3, 4) and B (-5, 6, -7) as the opposite ends of a diameter. Deduce the equation in cartesian form. Also find the center and radius of the sphere.

कक्षा – 12 वीं

अंक योजना

Mark Dirsbution 2013-14

हायर सेकेण्डरी

पूर्णांक – 100

विषय : गणित

समय – 3.00 घण्टे

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आ. अंक	वस्तुनिष्ठ 1 अंक	अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल प्रश्न
				2	4	5	6	
1.	आंशिक भिन्न	5	1	अंक —	अंक 1	अंक —	अंक —	1
2.	प्रतिलोम फलन	5	1	—	1	—	—	1
3.	त्रिविमीय ज्यामितीय	15	4	—	—	1	1	2
4.	समतल							
5.	सरल रेखा एवं गोला							
6.	सदिश	15	3	3	—	—	1	4
7.	सदिशों का गुणनफल							
8.	सदिशों का त्रिविमीय ज्या. में अनुप्रयोग							
9.	फलन, सीमा, सातत्य	5	—	—	—	1	—	1
10.	अवकलन	10	2	—	2	—	—	2
11.	कठिन अवकलन							
12.	अवकलन का अनुप्रयोग							
13.	समाकलन	15	6	2	—	1	—	3
14.	कठिन समाकलन							
15.	निश्चित समाकलन							
16.	अवकलन समीकरण	05	—	—	—	1	—	1
17.	सहसंबंध	05	1	—	1	—	—	1
18.	समाश्रयण	05	1	—	1	—	—	1
19.	प्रायिकता	05	—	—	—	1	—	1
20.	आंकिक विधियाँ	05	5	—	—	—	—	—
	योग	100	25	5	7	5	2	19+ 5 = 24

निर्देश : प्रश्नपत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश

1. प्रश्न क्र. 1 से 5 तक 5 प्रकार के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। जिसके अंतर्गत एक शब्द में उत्तर मेंचिग, सही विकल्प तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति के प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है। (1 × 5 × 5 = 25) यह प्रश्न प्रत्येक छात्र को हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्न क्र. 6 से 24 प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों की उत्तर सीमा नि. होगी
 अतिलघुउत्तरीय प्रश्न 02 अंक लगभग 30 शब्द
 लघुउत्तरीय प्रश्न 04 अंक लगभग 75 शब्द
 दीर्घउत्तरीय प्रश्न 05 अंक लगभग 120 शब्द
 दीर्घउत्तरीय प्रश्न 06 अंक लगभग 150 शब्द
 निबंधात्मक प्रश्न 07 अंक लगभग 250 से 150 शब्द
3. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर शेष सभी प्रश्नों में विकल्प योजना रहेगी।
4. विकल्प के प्रश्न उसी इकाई से, समान कठिनाई स्तर वाले तथा पाठ्यक्रम अनुसार होना चाहिए।
5. कठिनाई स्तर— 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन।

Set-C

कक्षा-12वीं
विषय-गणित
आदर्श उत्तर

प्र. 1

हल: अ. (iii) $A = -5, B = 7$

ब. (iv) $\bar{0}$

स. (ii) $\frac{1}{x \log x \log \log x}$

द. (iii) $\frac{1}{\cos x}$

इ. (iv) $e^x(x-1)$

प्र. 2

हल: अ. $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

ब. $\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}$

स. 0

द. $\sqrt{a^2 + b^2}$

इ. $(2 \sin \sqrt{x} + C)$

प्र. 3

हल: अ. (iii)

ब. (iv)

स. (i)

द. (ii)

इ. (vi)

प्र. 4

हल: अ. $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ब. $\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

स. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

द. $\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x-3}{2} + C$

इ. $x. \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + C$

प्र. 5

हल: अ.	सत्य
ब.	असत्य
स.	असत्य
द.	असत्य
इ.	असत्य

प्र. 6

हल: दिया गया है—

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}, \vec{c} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -6\hat{j}$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |-6\hat{j}|$$

$$= 6$$

1 अंक

1 अंक

अथवा

बिन्दु A, B, C के स्थित सदिश क्रमशः $a - 2b + 3c$,
 $2a + 3b - 4c$ तथा $-7b + 10c$ है।

$$\overline{AB} = a + 5b - 7c,$$

1 अंक

$$\overline{BC} = -2(a + 5b - 7c)$$

$$\overline{BC} = -2\overline{AB}$$

1 अंक

अतः बिन्दु A, B, C संरेख है।

प्र. 7

हल: चँकि \vec{a} और \vec{b} परस्पर लम्बवत् है।

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 3 \times 2 + 2(-\lambda) = 0$$

1 अंक

$$6 + 6 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda = -3$$

1 अंक

अथवा

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= -2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$$

1 अंक

$$\vec{b} \times \vec{a} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$$

1 अंक

प्र. 8

हल: $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 1 अंक

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

अतः सदिश समतलीय है।

1 अंक

अथवा

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$
 1 अंक

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 3 + 1(-2) + (-3)(-1)}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

1 अंक

प्र. 9

हल: $\int x^2 \sin 2x dx$

$$= x^2 \int \sin 2x dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2 \int \sin 2x dx \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$
 1 अंक

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + x \int \cos 2x dx - \left[\frac{d}{dx} x \int \cos 2x dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$
 1 अंक

अथवा

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} \cos\theta d\theta \text{ माना } x = \sin\theta, dx = \cos\theta d\theta,$$

$$\theta = \sin^{-1}x$$

$$= \int \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta d\theta$$
 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$$= \int (1 - \sin\theta) d\theta$$
 1 अंक

$$= \theta + \cos\theta$$

$$= \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$$
 1 अंक

प्र. 10

हल:
$$\int \sqrt{5+4x-x^2} dx = \int \sqrt{9-(4-4x-x^2)} dx$$
$$= \int \sqrt{(3)^2 - (x-2)^2} dx \quad \text{1 अंक}$$
$$= \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-2}{3} \quad \text{1 अंक}$$

अथवा

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x dx$$
$$= \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$
$$= \int t^5 (1 - t^2) dt \text{ माना } \sin x = t, \cos x dx = dt \quad \text{1 अंक}$$
$$= \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + c \quad \text{1 अंक}$$

प्र. 11

हल:
$$\frac{16}{(x+2)(x^2-4)} = \frac{16}{(x+2)(x+2)^2}$$
$$= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} \quad \dots(1)$$

$$16 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x+2) + C(x-2) \quad \text{1 अंक}$$

x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर

$$0 = A + B \quad \dots(2)$$

x के गुणांकों की तुलना करने पर

$$0 = 4A + C \quad \dots(3)$$

अचर पदों की तुलना करने पर

$$16 = 4A - 4B - 2C \quad \dots(4)$$

समी. (ii), (iii) व (iv) को हल करने पर

$$A = 1, B = -1, C = -4 \quad \text{1 अंक}$$

AB तथा C के मान समी. 1 में रखने पर

$$\frac{16}{(x+2)(x^2-4)} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{4}{(x+2)^2} \quad \text{1 अंक}$$

अथवा

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{x^2(x-2) - 1(x-2)} = \frac{1}{(x-2)(x^2-1)}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)} \quad \text{1 अंक}$$

$$1 = A(x+1)(x-2) + B(x-2)(x-1) + C(x-1)(x+1)$$

1 अंक

$$x=1 \text{ रखने पर } 1 = -2A, A = -\frac{1}{2}$$

$$x=-1 \text{ रखने पर } 1 = B(-2)(-3), B = \frac{1}{6}$$

1 अंक

$$x=2 \text{ रखने पर } 1 = 3C, C = \frac{1}{3}$$

$$A + B + C = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0$$

1 अंक

प्र. 12

हल: माना कि

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} = x, \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$x = \cos^{-1} \frac{4}{5}$$

1 अंक

$$L.H.S. = \cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13}$$

$$= \cos^{-1} \left\{ \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \right\}$$

1 अंक

$$= \cos^{-1} \left\{ \frac{48}{65} - \frac{15}{65} \right\}$$

1 अंक

$$= \cos^{-1} \frac{33}{65} \quad R.H.S.$$

1 अंक

अथवा

$$\tan^{-1} \frac{x+1+x-1}{1-(x+1)(x-1)} = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

1 अंक

$$\frac{2x}{1-x^2+1} = \frac{8}{31}$$

1 अंक

$$8x^2 + 62x - 16 = 0$$

$$4x^2 + 31x - 8 = 0$$

1 अंक

$$(4x-1)(x+8) = 0$$

$$x = -8, x = \frac{1}{4}$$

1 अंक

प्र. 13

हल: माना $f(x) = \log x$ तथा $f(x+h) = \log(x+h)$

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{x}\right)^3 \dots \theta \right] \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{0}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{0}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

1 अंक

अथवा

$$y = \log \sqrt{\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{mx}{2}}{2 \cos^2 \frac{mx}{2}}}$$

$$= \frac{d}{dx} \log \tan \frac{mx}{2}$$

माना

$$\tan \frac{mx}{2} = t$$

1 अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log t$$

$$= \frac{d}{dt} \log t \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt} \log t \frac{d}{dx} \tan \frac{mx}{2} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \frac{1}{t} \times \frac{m}{2} \sec^2 \frac{mx}{2}$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{mx}{2}} \times \frac{m}{2} \sec^2 \frac{mx}{2} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \frac{m}{2 \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{mx}{2}}$$

$$= \frac{m}{\sin mx}$$

$$= m \operatorname{cosec} mx$$

1 अंक

प्र. 14

हल:

$$y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \dots \infty}}}$$

$$y = \sqrt{\tan x + y}$$

$$y^2 = \tan x + y$$

1 अंक

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

1 अंक

$$(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

1 अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{2y - 1}$$

1 अंक

अथवा

$$y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$$

$$t = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x = \tan \alpha, y = \tan^{-1} \left(\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right)$$

1 अंक

$$t = \sin^{-1} \left(\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right)$$

$$y = \tan^{-1} (\tan 2\alpha)$$

माना

$$t = \sin^{-1}(\sin 2\alpha), t = 2\alpha, t = 2 \tan^{-1} x, \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$y = 2\alpha$$

1 अंक

$$y = 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

1 अंक

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \div \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{2} = 1$$

1 अंक

प्र. 15

हल: माना गुब्बारे की त्रिज्या r है तथा आयतन V है।

$$r = \frac{3}{4}(2x + 3), \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

1 अंक

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3} \times 3\pi r^2 = 4\pi r^2$$

1 अंक

अब x के सापेक्ष इसके आयतनके परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi r^2 \times \frac{3}{2}$$

1 अंक

$$= 4\pi \left(\frac{3}{4}\right)^2 (2x + 3)^2$$

$$= \frac{27}{8} \pi (2x + 3)^2$$

1 अंक

अथवा

(i) $f(x) = \sin x,$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \cos x$$

जब $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \cos x > 0$ अर्थात् $f'(x) > 0$

1 अंक

चूँकि फलन अन्तराल के सीमान्त बिन्दुओं पर भी परिभाषित है।

∴ $f(x)$ अन्तराल $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ में वर्धमान है।

1 अंक

(ii) $f(x) = \cos x,$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$\text{जब } 0 \leq x \leq \pi$$

x या तो प्रथम या द्वितीय चतुर्थांश में है।

1 अंक

∴ $\sin x > 0$

⇒ $-\sin x < 0$

⇒ $f'(x) < 0$

∴ $f(x)$ अन्तराल $(0, \pi)$ में हासमान है परन्तु

$f(x)$ अन्तराल के सीमा बिन्दुओं पर भी परिभाषित है।

∴ $f(x)$ अन्तराल $[0, \pi]$ में भी परिभाषित है।

1 अंक

प्र. 16

हल:

क्र.	x_1	y_1	u_i	v_i	$u_i v_i$	u_1^2	v_1^2
1	35	32	-3	-1	3	9	1
2	34	30	-4	-3	12	16	9
3	40	31	2	-2	-4	4	4
4	43	32	5	-1	-5	25	1
5	56	53	18	20	360	324	400
6	20	20	-18	-13	234	324	169
7	38	33	0	0	0	0	0
	266	231	0	0	600	702	584

2 अंक

$$\bar{x} = \frac{266}{7} = 3.8, \bar{y} = \frac{231}{7} = 33$$

$$\sum u_i = 0, \sum u_i^2 = 702, n = 7$$

$$\sum v_i = 0, \sum v_i^2 = 584, \sum u_i v_i = 600$$

$$P = \frac{n \sum u_i v_i - \sum u_i \sum v_i}{\sqrt{(n \sum u_i^2 - (\sum u_i)^2)} \sqrt{(n \sum v_i^2 - (\sum v_i)^2)}} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \frac{7 \times 600 - 0.0}{\sqrt{(7 \times 702 - 0)} \sqrt{(7 \times 584 - 0)}} = 0.9372 \quad 1 \text{ अंक}$$

अथवा

$$\begin{aligned} \sigma_{x-y}^2 &= \frac{1}{n} \sum [(x-y) - (\bar{x} - \bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum [(x - \bar{x}) - (y - \bar{y})]^2 \quad 1 \text{ अंक} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2 - 2 \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y \quad 1 \text{ अंक} \end{aligned}$$

$$2\rho\sigma_x\sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2$$

$$\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y} \quad 1 \text{ अंक}$$

प्र. 17

हल: $\bar{x} = 7.6, \bar{y} = 14.8, \rho = 0.99$

$$\sigma_x = 3.6, \sigma_y = 2.5$$

y की x पर समाश्रयण रेखा

$$y - \bar{y} = P \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad 1 \text{ अंक}$$

$$y - 14.8 = 0.99 \times \frac{2.5}{3.6} (x - 7.6) \quad 1 \text{ अंक}$$

चूँकि

$$x = 12$$

$$y = \frac{0.99 \times 2.5}{3.6} (12 - 7.6) + 14.8 \quad 1 \text{ अंक}$$

$$y = 17.825 \quad 1 \text{ अंक}$$

अथवा

क्र.	x	y	x^2	y^2	xy
1	2	6	4	36	12
2	4	5	16	25	20
3	6	4	36	16	24
4	8	3	64	9	24
5	10	2	100	4	20
$\Sigma x = 30$		$\Sigma y = 20$	$\Sigma x^2 = 220$	$\Sigma y^2 = 90$	$\Sigma xy = 100$

2 अंक

y का x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण $y = a + b$ है।
माना प्रसामान्य समी.

$$\Sigma y = a + b \Sigma x$$

$$\Sigma xy = a \Sigma x + b \Sigma x^2$$

मान रखने पर

$$20 = 5a + 30b$$

$$100 = 30a + 220b$$

हल करने पर $a = 7, b = -\frac{1}{2}$

$$y \text{ की } x \text{ पर } y = 7 - \frac{1}{2}x$$

1 अंक

x की y पर समा. रेखा का समी. $x = c + dy$

प्रसामान्य समी. $\Sigma x = c + d \Sigma y$

$$\Sigma xy = c \Sigma y + d \Sigma y^2$$

मान रखने पर $30 = 5c + 20d$

$$100 = 20c + 90d$$

हल करने पर $c = 14, d = -2$

x की y पर समा. रेखा का समी.

$$x = 14 - 2y$$

1 अंक

प्र. 18

हल:

$$l + m = -n$$

$$2(l + m) - mn = 0$$

$$m = -2, n = 0$$

$$l + m = 0 \text{ या } l = -m$$

1 अंक

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$l^2 + l^2 + 0 = 1$$

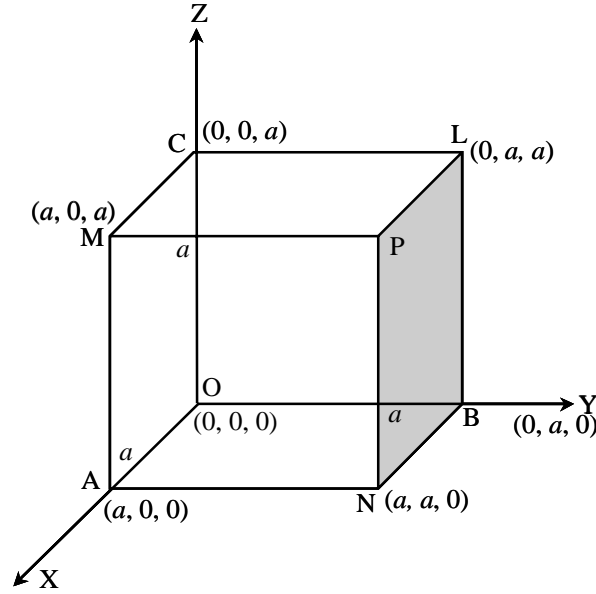
$$\therefore l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 1 अंक}$$

$m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ अतः रेखाओं की दि. को $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ तथा $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ है। 1 अंक
इनके बीच का कोण $\cos\theta$

$$\cos\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0.0 = -1 \quad 1 \text{ अंक}$$

$$\cos 180^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ \quad 1 \text{ अंक}$$

अथवा



1 अंक

माना घन की 3 संलग्न कोरें OA, OB, OC है।

$$OA = OB = OC = a$$

$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a), P(a, a, a), L(0, a, a), M(a, 0, a), N(a, a, 0)$

1 अंक

विकर्ण OP तथा AL के दि. अनु. क्रमशः (a, a, a) तथा $(-a, a, a)$ होंगे

$$\cos\theta = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$= \frac{a \times (-a) + (a \times a) + (a \times a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a'+b'+c'}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1 अंक

प्र. 19

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2}$$

1 अंक

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{4x^2} \times 4 \\
&= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \\
&= 8 \times (1)^2 = 8
\end{aligned}$$

2 अंक

अतः $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = 8$

2 अंक

अथवा

$$\begin{aligned}
Rf(1+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^2 + 1 \\
&= (1+0)^2 + 1 = 2
\end{aligned}$$

2 अंक

$$\begin{aligned}
Lf(1-h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (1-h)^2 = 1 \\
f(1) &= 2
\end{aligned}$$

2 अंक

$$Rf(1+h) = f(1) \neq Lf(1-h)$$

अतः दिया गया फलन $x = 1$ पर असंतत है।

1 अंक

प्र. 20. माना $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$

माना $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx \\
&= \frac{1}{2} (1 + t^2) dx
\end{aligned}$$

1 अंक

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

पुनः $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

1 अंक

यदि $x=0$ तथा $t=0$ यदि $x=\pi$ हो तो $t=\infty$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{(1+t^2) \left[5 + 4 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \right]}$$

1 अंक

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \left[\tan^{-1} \frac{t}{3} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{3} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0]$$

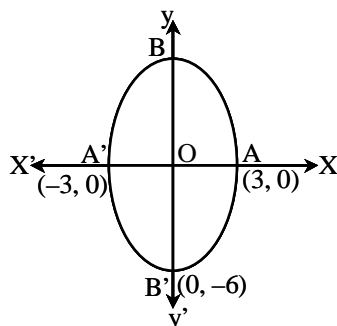
$$= \frac{2}{3} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{3}$$

2 अंक

अथवा

हल:

$$y = 2\sqrt{9-x^2} \text{ वर्ग } y^2 = 4(9-x^2)$$



1 अंक

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

दीर्घ अक्ष $2a = 12$

लघु अक्ष $2b = 6$

1 अंक

वक्र तथा x अक्ष के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_{-3}^3 y \, dx = \int_{-3}^3 2\sqrt{9-x^2} \, dx$$

1 अंक

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{9-x^2} + 9\sin^{-1}\frac{x}{3} \right\} \right]_{-3}^3$$

$$= 2 \left[9 \left\{ \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) \right\} \right]$$

$$= 9 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 9\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

2 अंक

21. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

$\sec^2 x$ का गुणा करने पर

$$\frac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x \sec^2 x$$

1 अंक

$$\text{I.f.} = e^{\int \sec^2 x \, dx} = e^{\tan x}$$

1 अंक

$e^{\tan x}$ का गुणा करने पर

$$e^{\tan x} \frac{dy}{dx} + y \sec^2 x e^{\tan x} = e^{\tan x} \tan x \sec^2 x$$

1 अंक

समाकलन करने पर

$$y e^{\tan x} = \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x \, dx + C$$

$$\therefore \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x \, dx = (\tan x - 1) e^{\tan x}$$

1 अंक

$$ye^{\tan x} = (\tan x - 1)e^{\tan x} + C$$

$e^{-\tan x}$ का गुणा करने पर

$$y = (\tan x - 1) + ce^{-\tan x}$$

1 अंक

अथवा

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

1 अंक

माना

$$y = vx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

1 अंक

$$v + x \frac{dv}{dx} = -\frac{x^2 + v^2 x^2}{2x \cdot vx}$$

$$x \frac{dv}{dx} = -\frac{1 + v^2 - v}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = +\frac{-1 - 3v^2}{2v}$$

$$\frac{-2v}{1 + 3v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

1 अंक

समाकलन

$$-\int \frac{+2v dv}{1 + 3v^2} = \int \frac{dx}{x} - \log C$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{6v dv}{1 + 3v^2} = \int \frac{dx}{x} - \log C$$

1 अंक

$$-\frac{1}{3} \log(1 + 3v^2) = \log x - \log C$$

$$\log x + \log(1 + 3v^2)^{1/3} = \log C$$

$$x \left(1 + 3 \frac{y^2}{x^2}\right)^{1/3} = C$$

$$x^3 \left(1 + \frac{3y^2}{x^2}\right) = C$$

$$x^3 + 3xy^2 = C$$

1 अंक

प्र. 22

हल: (a)

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

A = एक पान का कार्ड निकाला जाना

B = पहले कार्ड को गड्डी में रखने के पश्चात् दूसरा कार्ड निकालना

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

1 अंक

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16}$$

2 अंक

(b) पहली घटना $P(A) = \frac{13}{52}$

1 कार्ड निकालने पर 51 कार्ड बचे जिसमें 12 पान के कार्ड है।
दूसरी घटना के लिए

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{12}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$$

$$= \frac{1}{17}$$

2 अंक

अथवा

एक पाँसे को 1 बार फेंकने में संख्याँ 6 आने की प्रायिकता $p = \frac{1}{6}$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n = 3$$

$$P(x=r) = {}^n C_r p^r q^{n-r}$$

$x = 0$ के लिए

$$P(x=0) = {}^3 C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-0}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{125}{216} = \frac{125}{216}$$

1 अंक

$x = 1$ के लिए

$$P(x) = {}^n C_r p^r q^{n-r}$$

$$P(x=r) = {}^3 C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{75}{216}$$

$x = 2$ के लिए

1

$$p(x=2) = 3c_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2}$$
$$= 1 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

1 अंक

1 अंक

$x = 3$ के लिए

$$p(x=3) = 3c_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-3}$$
$$= 1 \times \frac{1}{216} \times 1 = \frac{1}{216}$$

प्रायिकता वितरण

$x = r$	0	1	2	3
$p(x=r)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$
$\sum p(x=r)$	$= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}$			
	$= 1$			

2 अंक

प्र. 23

हल: माना गोले का समी.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

1 अंक

$$(3)^2 + 24.3 + d = 0$$

$$9 + 6v + d = 0$$

$$1 - 2v + d = 0$$

$$4 - 4w + d = 0$$

2 अंक

केन्द्र $(-u, -v, -w)$, $3x + 2y + 4z = 1$ पर स्थित है।

$$-3u - 2v - 4w - 1 = 0$$

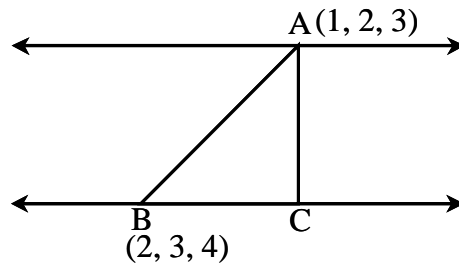
1 अंक

$$\text{हल करने पर } u = -\frac{4}{3}, v = 0, w = \frac{3}{4}, d = -1$$

$$6(x^2 + y^2 + z^2) - 16x + 9z - 6 = 0$$

2 अंक

अथवा



1 अंक

A (1, 2, 3)

B (2, 3, 4)

रेखा m की दिक् को न्यास

$$\frac{4}{\sqrt{16+36+64}}, \frac{6}{\sqrt{16+36+64}}, \frac{8}{\sqrt{16+36+64}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

1 अंक

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}$$

$BC = AB$ का m पर प्रक्षेप

1 अंक

$$= \frac{2}{\sqrt{29}} (2-1) + \frac{3}{\sqrt{29}} (3-2) + \frac{4}{\sqrt{29}} (4-3)$$

$$= \frac{9}{\sqrt{29}}$$

1 अंक

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3 - \frac{81}{29}}$$

समान्तर रेखाओं के बीच दूरी $= \sqrt{\frac{6}{29}}$

1 अंक

प्र. 24

हल: यहाँ

$$a_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$b_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$a_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$b_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

1 अंक

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

2 अंक

$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{6}$$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

1 अंक

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

2 अंक

अथवा

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = -5\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0 \quad 1 \text{ अंक}$$

$$[\vec{r} - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})] \cdot [\vec{r} - (-5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k})] = 0$$

यही अभीष्ट गोले का समी. है।

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ रखने पर} \quad 1 \text{ अंक}$$

$$[(x - 2)\hat{i} + (y + 3)\hat{j} + (z - 4)\hat{k}] \cdot [(x + 5)\hat{i} + (y - 6)\hat{j} + (z + 7)\hat{k}] = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 3z - 56 = 0$$

गोले का केन्द्र $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ है। 2 अंक

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 56} = \frac{\sqrt{25}}{2} \quad 2 \text{ अंक}$$