हायर सेकण्डरी स्कूल परीक्षा–2012–13

HIGHER SECONDARY SCHOOL EXAMINATION

प्रादर्श प्रश्न–पत्र

Model Question Paper

उच्च गणित

HIGHER MATHEMATICS

(Hindi and English Versions)

Time– 3 घंटे Maximum Marks–100

निर्देश–

(1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
(2) प्रश्नों पर आधारित अंक उनके सम्मुख दर्शाए गए हैं।
(3) प्रश्न पत्र में दो खण्ड अ एवं ब दिए गए हैं।
(4) खण्ड अ में दिए गए प्रश्न क्र. 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं।
(5) खण्ड ब में प्रश्न क्र. 6 से 21 में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।

Instructions

(1) All questions are compulsory to solve.
(2) Marks have been indicated against each question
(3) Two sectrions 'A' and 'B' are given in the question paper.
(4) In section A question No. 1 to 5 are of objective type questions.
(4) Internal options are given in question No. 6 to 21

खण्ड–अ वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न–1 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए– **05 × 1 अंक**

(i) $\frac{1}{x(x-1)}$ के आंशिक भिन्न हैं–

(a) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$

(c) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है–

(a) 45° (b) 90°
(d) 15° (d) 30°

(iii) समतल XY, YZ तथा ZX का समीकरण क्रमशः हैं–

(a) z = 0 , x = 0 तथा y = 0 (b) x = 0 , y = 0 तथा z = 0
(c) y = 0 , z = 0 तथा x = 0 (d) x = 0 , z = 0 तथा y = 0

(iv) यदि सदिश $a\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $3\hat{i}++6\hat{j}-5\hat{k}$ परस्पर लम्ब हों तो a का मान

होगा–

(a) 9 (b) 16

(c) 25 (d) 36

(v) एक गोले $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$ का केन्द्र है–

(a) $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ (b) (1, 2, 1)

(c) (–2, 4, 2) (d) (1, –2, –1)

Write the correct answer from the given options provided in every objective type question

(i) The partial fractions of $\frac{1}{x(x-1)}$ are –

(a) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$

(c) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$

(ii) The value of $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ is —

(a) 45° (b) 90°

(d) 15° (d) 30°

(iii) The equation of the plance XY, YZ and ZX are respectively —

(a) z = 0 , x = 0 and y = 0 (b) x = 0 , y = 0 and z = 0

(c) y = 0 , z = 0 and x = 0 (d) x = 0 , z = 0 and y = 0

(iv) If vector $a\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + +6\hat{j} - 5\hat{k}$ are mutually perpendicular then the value of a is—

(a) 9 (b) 16

(c) 25 (d) 36

(v) The centre of the sphere $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$ is—

(a) $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ (b) (1, 2, 1)

(c) (–2, 4, 2) (d) (1, –2, –1)

प्रश्न–2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथन छाँटकर अपनी उत्तरपुस्तिका में लिखिए। **5 × 1 अंक**

(i) त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी नहीं होती हैं।

(ii) cos x° का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक $-\frac{\pi}{180}$ sin x° होता है।

(iii) सह–संबंध गुणांक की गणना तभी की जा सकती है जब दोनों विचर समान इकाई में हों।

(iv) दो स्वतंत्र चरों की समाश्रयण रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

(v) सदिश $\hat{i} - 3\hat{k}$ की दिक् कोज्याएँ क्रमशः $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$ हैं।

Write True / False in the following statements

(i) The medians of a traingle are not concurrent.

(ii) Diff. Coef. of cos x° with respect to x is $-\frac{\pi}{180}$ sin x° होता है।

(iii) The correlation coefficient can be calculated only if both variable have same units

(iv) The regression lines of two independent variables are paralle to each other.

(v) The direction consine of vector $\hat{i} - 3\hat{k}$ are $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$ respectively

प्रश्न–3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए– **05 × 1 अंक**

(i) त्रिविमीय निर्देशांक अक्षों पर ..... गोले खींचें जा सकते हैं।

(ii) यदि बल $\vec{F} = \left(\hat{i} + \hat{j}\right)$ व विस्थापन $\vec{r} = \left(\hat{i} - \hat{j}\right)$ तो कार्य होगा .....

(iii) x^5 का x^2 के सापेक्ष अवकलन ..... है।

(iv) बिन्दु (1, –2, 3) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ..... है जो $2x - y + 3z = 0$ के समांतर है।

(v) यदि विस्थापन $S = 2t + t^2$ हो तो समय $t = 0$ पर वेग होगा .....।

Fill in the Blanks—

(i) ..... spheres can be drawn on three dimensional co-ordinate axes.

(ii) If force $\vec{F} = \left(\hat{i} + \hat{j}\right)$ and displacement $\vec{r} = \left(\hat{i} - \hat{j}\right)$ then work is .....

(iii) Differentiations of x^5 with respect to x^2 is .....

(iv) Equation of plane passing through the points (1, –2, 3) and parallel to $2x - y + 3z = 0$ is .....

(v) If displacement $S = 2t + t^2$ then velocity at time $t = 0$ is .....

प्रश्न–4. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में लिखिए– **05×1 अंक**

(i) न्यूटन रैफसन विधि से किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

(ii) 0.824631E06 – 0.743215E06 का मान लिखिए।

(iii) समलबं चतुर्भुज नियम $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2[y_1 + y_2 + \ldots\ldots y_{n-1}] + y_n]$ में h का मान लिखिए।

(iv) आंकिक विधियों संबंधी सिम्पसन का एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए।

(v) समलंब चतुर्भुज नियम में विषम संलग्नक वाले y के गुणांक लिखिए।

Write the answer of each question in one word / sentence of the following—

(i) Write the formula to find square root of any number by Newtons-Reiphsons method.

(ii) Write the value of 0.824631E06 – 0.743215E06.

(iii) Write the value of h in trapezordalrul $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2[y_1 + y_2 + \ldots\ldots y_{n-1}] + y_n]$

(iv) Write the one third formula of Simpson's relating to numerical method.

(v) Write coefficient of y with odd subscripts in trapezoidal rule.

प्रश्न–5. सही जोड़ी बनाइए– **05 × 1 अंक**

(i)	$\int x^{-1}\,dx$	(a)	$x \log x - x + c$
(ii)	$\int x^{-2}\,dx$	(b)	$2\sqrt{x}$
(iii)	$\int \log x\,dx$	(c)	$\log x + c$
(iv)	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	(d)	$-\frac{1}{x}$
(v)	$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$	(e)	$\log (\sin x) + c$
		(f)	$-\cot x$
		(g)	$\log (\cot x)$

Make the correct pairs

(i)	$\int x^{-1}\,dx$	(a)	$x \log x - x + c$
(ii)	$\int x^{-2}\,dx$	(b)	$2\sqrt{x}$
(iii)	$\int \log x\,dx$	(c)	$\log x + c$
(iv)	$\int \frac{1dx}{\sin^2 x}$	(d)	$-\frac{1}{x}$
(v)	$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$	(e)	$\log (\sin x) + c$
		(f)	$-\cot x$
		(g)	$\log (\cot x)$

खण्ड–ब (Section-B)

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न (Very Short Answer Type Questions)

प्रश्न–6. भिन्न $\frac{7x+4}{(3x+2)(x+1)^2}$ **को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए।** **4 अंक**

Resolve $\frac{7x+4}{(3x+2)(x+1)^2}$ into partial fraction

अथवा (or)

भिन्न को $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए।

Resove $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ into partial fraction

प्रश्न–7. सिद्ध कीजिए कि– **4 अंक**

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$$

Prove that—

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए– $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

Prove that— $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न–8. यदि $y = \frac{x}{x+4}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ **4 अंक**

If $y = \frac{x}{x+4}$ then prove that $x\frac{dy}{dx}$, then prove that $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$

अथवा (or)

यदि $x = a\sec\theta$ तथा $y = b\tan\theta$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $x = a\sec\theta$ and $y = b\tan\theta$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$

प्रश्न–9. यदि $y = 2\sin x + 3\cos x$ हो तो सिद्ध कीजिए कि— $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

4 अंक

If $y = 2\sin x + 3\cos x$, then prove that— $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

अथवा (or)

यदि $y = \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + ...\infty}}}$ हो तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{2y-1}$

If $y = \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + ...\infty}}}$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{2y-1}$

प्रश्न–10. शांत जल में पत्थर फेंकने से वृत्तीय तरंग बनती है, जिसकी त्रिज्या 2 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ती है, जब त्रिज्या 7 सेमी हो तो क्षेत्रफल में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए।

A small stone thrown into a still pond produces a circular ripple whose radius increases at the rate of 2 cm/second, find the rate of increased of area when radius is 7 cm.

अथवा (or)

निम्न फलन के लिए रोले प्रमेय की जाँच कीजिए–

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ अंतराल [0 3]

Verify Rolle's theorem for the following function

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ interval [0 3]

प्रश्न–11. निम्नांकित आँकड़ों के लिए सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए– **4 अंक**

x	3	4	6	8	9
y	90	100	130	160	170

Calculate the co-relation coeficient for following data

x	3	4	6	8	9
y	90	100	130	160	170

अथवा (or)

दो चर राशियों x तथा y का सह–संबंध गुणांक ρ है तो सिद्ध कीजिए कि

$\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\, 2\sigma_y}$, जहाँ σ_x^2, σ_y^2 तथा σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y तथा x – y के प्रसरण गुणांक है।

If x and y are two variables and ρ is the coefficient of co-relation between them, then show that $\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\, 2\sigma_y}$, where σ_x^2, σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are the variances of x, y and x – y respectively.

प्रश्न–12. समाश्रयण रेखाओं $2x - 9y + 16 = 0$ एवं $x - 2y + 1 = 0$ के लिए सह–संबंध गुणांक की गणना कीजिए। **4 अंक**

If two regression lines are $2x - 9y + 16 = 0$ and $x - 2y + 1 = 0$ then find the cofficient of co-relation between them.

अथवा (or)

निम्नांकित आँकड़ों के लिए y के x पर तथा x के y पर समाश्रयण गुणांकों की गणना कीजिए।

x	3	5	6	6	9
y	2	3	4	6	5

Estimate the coefficient of regrassion of y on x and x on y by the given data

x	3	5	6	6	9
y	2	3	4	6	5

प्रश्न–13. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (7, 1,7) तथा (2,8,4) से गुजरता है तथा समतल $x + y + z = 1$ के लंबवत् है। **5 अंक**

Find the equation of the plane which passes through (7, 1,7) and (2,8,4) and perpendicular to the plane $x + y + z = 1$

अथवा (or)

बिन्दु (1, 3, 4) का समतल $2x - y + z + 3 = 0$ पर प्रतिबिंब ज्ञात करो।

Find the image of point (1.3.4) on the plane $2x - y + z + 3 = 0$

प्रश्न–14. सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC की भुजा AB पर लम्ब की लंबाई = $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|}{|\vec{b}-\vec{a}|}$ है जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ क्रमशः बिन्दु A, B, C के स्थिति सदिश है।

Prove that the perpendicular on side AB of triangle ABC is equal to = $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|}{|\vec{b}-\vec{a}|}$ where $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are the position vector of vertex A, B, C, respectively.

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए कि अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है। (सदिश विधि से)

Prove that the angle in semi circle is right angle (by vector mentod)

प्रश्न–15. सिद्ध कीजिए कि– $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{जब } x \neq 1 \\ 2 & \text{जब } x = 1 \end{cases}$ $x = 1$ पर असंतत है **5 अंक**

Prove that — $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{when } x \neq 1 \\ 2 & \text{when } x = 1 \end{cases}$ is discontinuous on $x = 1$

अथवा (or)

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cot x}{1-\cos x}$ का मान ज्ञात करो।

Find the value of $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cot x}{1-\cos x}$

प्रश्न–16. $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ का मान ज्ञात करो **5 अंक**

Find the value of $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$

अथवा (or)

$\int x^2 \sin^{-1} \times dx$ का मान ज्ञात करो

च्छा

Evaluate $\int x^2 \sin^{-1} \times dx$

प्रश्न–17. परवलय $y^2 = uax$ तथा रेखा $y = mx$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो। **5 अंक**

Find the area between the parabola $y^2 = uax$ and the line $y = mx$.

अथवा (or)

सिद्ध करो— $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$

Prove that— $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$

प्रश्न–18. अवकल समीकरण हल करो– **5 अंक**

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+\cos 2y}{1-\cos 2x} = 0$$

Solve the differential Equation—

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+\cos 2y}{1-\cos 2x} = 0$$

अथवा (or)

वक्र कुल $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the differential Equation for the family of curve $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

प्रश्न–19. एक पैकेट में 100 पेन हैं, जिनमें से 10 खराब है, यदि उनमें से 5 पेन यदृच्छा निकाले जाएं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम–से–कम एक खराब पेन प्राप्त हो। **5 अंक**

In a packet of 100 pen, 10 pens are defective, if 5 pens are drawn randomly then find the probability that at least one is defective

अथवा (or)

दो व्यक्ति A तथा B किसी पद के लिए आवेदन देते हैं। A के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ तथा B के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है तो प्रायकिता ज्ञात कीजिए कि दोनों में से किसी का भी चयन न हो।

Two person A and B applying for a post, probability of selection of A is $\frac{1}{4}$ and the probability of selection of B is $\frac{1}{6}$ then find the probability that none of them will be selected

प्रश्न–20. बिन्दु (–1, 3, –2) से होकर जाने वाली उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ और $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$ पर लंबवत् है। **6 अंक**

Find the equation of straight line the passing through the point (–1, 3, –2) and

perpendicular to the lines $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ और $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{5}$ पर लंबवत् है।

अथवा (or)

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 1, 1) , (1, 2, 1) और (2, 1, 1) से होकर जाता है।

Find the equation of the sphere passes through the points (1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 1) and (2, 1, 1)

प्रश्न–21. उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका व्यास AB है, जहाँ A एवं B के निर्देशांक A (2, –3, 4) तथा B (–5, 6, –7) दिए हैं, गोले के समीकरण का कार्तीय रूप भी प्राप्त कीजिए इसकी त्रिज्या और केन्द्र भी बताइए। **6 अंक**

Find the vector equation of sphere whose diameter is AB where the coordinate of A and B are A (2, –3, 4) and B (–5, 6, –7) also find its equation in cartesion form find the radius and centre of the sphere

अथवा (or)

किसी ΔABC में सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि– $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

In a traingle ABC, prove by vector method— $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

आदर्श उत्तर

उत्तर–1

(i) (d) (ii) (d)
(iii) (a) (iv) (a)
(v) (a)

उत्तर–2

(i) असत्य (ii) सत्य
(iii) असत्य (iv) असत्य
(v) असत्य

उत्तर–3.

(i) आठ (ii) 0 (शून्य)
(iii) $\frac{5}{2}x^3$ (iv) $2x - y + 3x = 13$
(v) 2

उत्तर–4.

(i) $\frac{1}{2}\left[x_n+\frac{N}{x_n}\right]$ (ii) 0.81416 E 06
(iii) $\frac{b-a}{n}$ (iv) $\int_a^b ydx=\frac{h}{3}$ $[(y_1 + y_{2n+1}) + y (y_2) + y_4 + ... y_{2n}) + 2 (y_3 + y_5 + ...y_{2n+1})$
(v) (2)

उत्तर–5.

(i) (c) (ii) (d)
(iii) (a) (iv) (f)
(v) (e)

उत्तर–6. $\dfrac{7x+4}{(3x+2)(x+1)^2}$

$$\frac{7x+4}{(3x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{3x+2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2} \quad .....(1) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$7x+4 = A(x+1)^2 + B(3x+2)(x+1) + C(3x+2)$$

(1 अंक)

$$7x+4 = A(x^2+2x+1)+B(3x^2+5x+2)+C(3x+2)$$

$$7x+4 = A(x+3B)x^2+(2A+5B+3C)x+(A+2B+2C)$$

x^2 , x व अचर पदों की तुलना दोनों पक्षों से करने पर–

पर $A + 3B = 0$ .....(2)

$2A + 5B + 3C = 7$ .....(3) (1 अंक)

$A + 2B + 2c = 4$ .....(4)

समीकरण (2), (3) तथा (4) को हल करने पर–

$A = -6 \quad , \quad B = 2 \quad , \quad C = 3$

A, B, C के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{7x+4}{(3x+2)(x+1)^2} = \frac{-6}{3x+2}+\frac{2}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2} \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर–

माना कि $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ .....(1) (1 अंक)

$\therefore \quad 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + c)(x - 1)$

$3x + 1 = x^2(A + B) + x(C - B) + (A - C)$ (1 अंक)

x^2 , x व अचर पदों के गुणांकों की तुलना दोनों पक्षों से करने पर–

$A + B = 0$ .....(2)

$C - B = 3$ .....(3) (1 अंक)

$A - C = 1$ .....(4)

समीकरण (2), (3) तथा (4) को हल करने पर–

$A = 2$

$B = -2$

$C = 1$

A, B, C के मान समीकरण (1) में रखने पर–

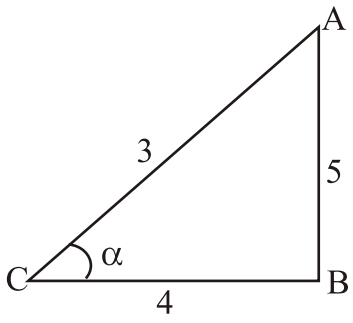
$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1}+\frac{1-2x}{x^2+1} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर–7 $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$ सिद्ध करना है

माना कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$

$$\sin\ \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$



तथा पुनः माना कि

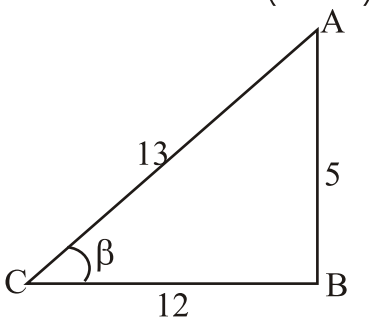
$$\tan^{-1}\frac{5}{12} = \beta$$

(1 अंक)

तब $\tan\ \beta = \frac{5}{12}$

$\therefore$ $\sin\ \beta = \frac{5}{13}$

तथा $\cos\ \beta = \frac{12}{13}$



हम जानते हैं कि–

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\ \alpha \cos\ \beta + \cos\ \alpha \sin\ \beta$$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} \quad \text{(1 अंक)}$$

$$= \frac{36+20}{65}$$

$\therefore$ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$ (1 अंक)

$\therefore$ $\alpha + \beta = \sin^{-1}\frac{56}{65}$ (1 अंक)

$\therefore$ $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

उत्तर–7. अथवा का उत्तर

सिद्ध करो– $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

L.H.S. $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$\left[\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5}\right] + \left[\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8}\right] \quad \text{(1 अंक)}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}\right)$$

सूत्र $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ से–

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{8}{15}}{\frac{14}{15}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{15}{56}}{\frac{55}{56}}\right)$$ (1 अंक)

$$\tan^{-1}\frac{8}{14} + \tan^{-1}\frac{15}{55}$$

$$\tan^{-1}\frac{4}{7} + \tan^{-1}\frac{3}{11}$$ (1 अंक)

पुनः सूत्र $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$ से

$$\tan^{-1}\frac{\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{11}\right)}{1-\frac{4}{7}\times\frac{3}{11}}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{44+21}{77}}{\frac{77-12}{77}}\right)$$

$$\tan^{-1}\frac{65}{66}$$ (1 अंक)

$$\tan^{-1} 1 = 45°$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ R.H.S.}$$

उत्तर–8.

दिया है $y = \frac{x}{x+4}$ .....(1)

समीकरण x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1.(x+4)-x.(1+0)}{(x+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x+4)^2} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$x\ \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{4}{x+4} \cdot \frac{x}{x+4} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{x}{x+4}\left[1 - \frac{x}{x+4}\right] \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$x\frac{dy}{dx} = y\ (1 - y) \qquad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न–8 के अथवा का उत्तर–

दिया है– $x = a \sec\ \theta$

$y = b \tan\ \theta \qquad (1 \text{ अंक})$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec\ \theta \tan\ \theta \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{dy}{d\theta} = b\ \sec^2\ \theta \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta}$$

$$= \frac{b \sec^2 \theta}{a \sec\theta \tan\theta} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{b}{a}\ \text{cosec}\ \theta \qquad \textbf{उत्तर}$$

उत्तर–9

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x$$

x के सपेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x - 3 \sin x \qquad (1 \text{ अंक})$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \sin x - 3 \cos x \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -[2 \sin x + 3 \cos x] \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$ यही सिद्ध करना था

प्रश्न–9 का अथवा का उत्तर–

$$y = \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + \sqrt{\sec x + ...\infty}}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{\sec x + y} \qquad (1 \text{ अंक})$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$$y^2 = \sec x + y \qquad (1 \text{ अंक})$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$2y \frac{dy}{dx} = \sec x \tan x + \frac{dy}{dx} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \text{ssec } x \tan x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{2y - 1} \qquad (1 \text{ अंक})$$

यही सिद्ध करना था

उत्तर–10

दिया है–

$$\text{त्रिज्या की दर} = \frac{dr}{dt}$$

$$= 2 \text{ सेमी/सेकेन्ड} \qquad (1 \text{ अंक})$$

चूँकि क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ (1 अंक)

$$\therefore \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

क्षेत्रफल में वृद्धि की दर $= \frac{dA}{dt}$ ज्ञात करना है।

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= 2\pi r \cdot 2$$

यदि $r = 7$ सेमी हो तब (1 अंक)

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times 7 \times 2$$

$$= 28\pi \text{ वर्ग सेमी/सेकेन्ड}$$

प्रश्न–10 का अथवा का उत्तर–

यहां $f(x) = 4x^2 - 12 + 9$

(i) चूँकि f (x) एक बहुपद है, अतः [0 3] में सतत् होगा (1 अंक)

(ii) f (x) = 8 x – 12, जिसका अस्तित्व विवृत्त अंतराल [0 3] में है (1 अंक)

∴ f (x) , [0 3] में अवकलनीय है

(iii) $f(0) = 4 \times 0 - 12 \times 0 + 9 = 9$

तथा $f(3) = 4(3)^2 - 12 \times 3 + 9 = 9$

∴ $f(0) = f(3)$

इस प्रकार रोले प्रमेय की सभी स्थितियाँ संतुष्ट होती हैं।

∴ अंतराल [0 3] में x का कम से कम एक ऐसा मान c अवश्य होना चाहिए कि–

$$f'(c) = 0$$

अब $f'(c) = 0$ (1 अंक)

$\Rightarrow \quad 8c - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad 8c = 12$

$$c = \frac{12}{8}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$= 1.5 \in [0\ 3]$ (1 अंक)

उत्तर–11

	x	y	u	v	uv	u^2	v^2
1	3	90	–3	–40	120	9	1600
2	4	100	–2	–30	60	4	900
3	6	130	0	0	0	0	0
4	8	130	2	30	60	4	900
5	9	170	3	40	120	9	1600
	30	650	$\Sigma u=0$	$\Sigma v=0$	$\Sigma uv=360$	$\Sigma u^2=26$	$\Sigma v^2=5000$

(1 अंक)

$$\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{650}{5} = 130$$

$u = x - \bar{x}$ (1 अंक)

$v = y - \bar{y}$

यदि सह संबंध गुणांक ρ हो तब

$$\rho = \frac{n\,\Sigma uv - \Sigma u \,.\, \Sigma v}{\sqrt{[n\,\Sigma v^2 - (\Sigma u)^2][n\,\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}}$$

(1 अंक)

$$= \frac{5 \times 360 - 0 \times 0}{\sqrt{[(5.26) - 0][5 \times 5000 - 0]}}$$ (½ अंक)

$$= \frac{5\times 360}{2\times\sqrt{26\times 5000}}$$

$$= \frac{360}{360.555} \qquad (½ \text{ अंक})$$

$$= 0.9985$$

प्रश्न–11 का अथवा का उत्तर

$$\sigma^2_{x-y} = \frac{1}{n}\sum[(x-y)-(\bar{x}-y)]^2 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{1}{n}\sum[(x-\bar{x})-(y-\bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum[(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2-2(x-\bar{x})(y-\bar{y}]$$

(1 अंक)

$$= \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\sum(y-\bar{y})^2-2.\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 3\sigma_x\,\sigma_y\,(\rho)$$

$$\sigma^2_{x-y} = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\,\rho\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2-\sigma^2_{x-y}}{2\,\sigma_x\,\sigma_y} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\therefore \quad \text{cov}\ (x\ .\ y) = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$\rho\ (x\ .\ y) = \frac{\text{cov}\,(x.y)}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$\text{cov}\ (x\ .\ y) = \rho\ \sigma_x\ \sigma_y$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \rho\ \sigma_x\ \sigma_y \qquad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर–12

दी गई समाश्रयण रेखाएँ

$$2x - 9y + 16 = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

तथा $\quad x - 2y + 1 = 0 \qquad$ .....(2) (1 अंक)

यदि रेखा (I) , y की x पर समाश्रयण रेखा है तो

$$9y = 2x + 16$$

$$y = \frac{2}{9}\,x + \frac{16}{9}$$

$$b_{yx} = \frac{2}{9} \qquad (1 \text{ अंक})$$

तथा यदि रेखा (2), x की y पर समाश्रयण रेखा है तो–

$$x = 2y - 1$$

$\therefore$ $b_{xy} = 2$ (1 अंक)

$$\rho = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} \quad \text{(½ अंक)}$$

$$= \sqrt{2 \times \frac{2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{2}{3} \quad \text{(½ अंक)}$$

अतः अभीष्ट सह–संबंध गुणांक $= \frac{2}{3}$

प्रश्न–12 का अथवा का उत्तर–

x_i	y_i	u_i	v_i	$u_i v_i$	u_i^2	v_i^2
3	2	–2.8	–2	5.6	7.84	4
5	3	–0.8	–1	0.8	0.64	1
6	4	+0.2	0	0	0.04	0
6	6	0.2	2	0.4	0.04	4
9	5	3.2	1	3.2	10.24	1
29	20	0	0	10	18.8	10

(1 अंक)

$$\bar{x} = \frac{29}{5}$$

$= 5.8$ (½ अंक)

$$\bar{y} = \frac{20}{5}$$

$= 4$ (½ अंक)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{18.5}{5} - \left(\frac{0}{5}\right)^2}$$

$= 1.939$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{10}{5} - \left(\frac{0}{5}\right)^2}$$

$= 1.414$

$$\rho = \frac{n \Sigma u_i v_i - \Sigma u_i \Sigma v_i}{\sqrt{\{n(\Sigma u_i^2 - (\Sigma u_i)^2\}\{n(\Sigma v_i^2 - (\Sigma u_i)^2\}}}$$

(1 अंक)

$$= \frac{5 \times 10 - 1}{\sqrt{(5 \times 18.8 - 0)(5 \times 10 - 0)}}$$

$$= \frac{50}{\sqrt{94 \times 50}}$$

$$= 0.729$$

अब y पर x का समाश्रयण गुणांक

$$= \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= \frac{0.729 \times 1.414}{1.939}$$ (½ अंक)

$$= 0.531$$

तथा अब x पर y का समाश्रयण गुणांक

$$= \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= \frac{0.729 \times 1.939}{1.414}$$ (½ अंक)

$$= 0.999$$

उत्तर–13

किसी बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण–

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ .....(I) (1 अंक)

अतः बिन्दु (7, 1, 7) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण–

$$a(x - 7) + b(y - 1) + c(z - 7) = 0$$

चूंकि यह बिन्दु (2, 8, 4) से भी गुजरता है, अतः

$a(2 - 7) + b(8 - 1) + c(4 - 7) = 0$

$$-5a + 7b - 3c = 0$$

या $5a - 7b + 3c = 0$ .....(II) (1 अंक)

चूँकि दिया गया समतल है–

$$x + y + z = 1$$ .....(III)

चूँकि समतल (I) तथा (III) परस्पर लंबवत् हैं अतः–

$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ .....(IV) (1 अंक)

यहाँ $a_1 = a$ $a_2 = 1$

$b_1 = b$ एवं $b_2 = 1$

$c_1 = c$ $c_2 = 1$

अतः (IV) के अनुसार

$$a \times 1 + b \times 1 + c \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a + b + c = 0 \qquad \text{(V)}$$

समीकरण (II) तथा (V) को हल करने पर–

$$\frac{a}{-7-3} = \frac{b}{3-5} = \frac{c}{5+7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{-10} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{5} = \frac{b}{1} = \frac{c}{-6} = k \quad \text{(माना)}$$

$\therefore$ $a = 5k$, $b = k$ तथा $c = -6k$ (1 अंक)

समीकरण (I) में a, b, c के मान रखने पर

$$5k(x-7)+k(y-1)-6k(z-7) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x+y-6z-35-1+42 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x + y - 6z + 6 = 0 \qquad \text{(1 अंक)}$$

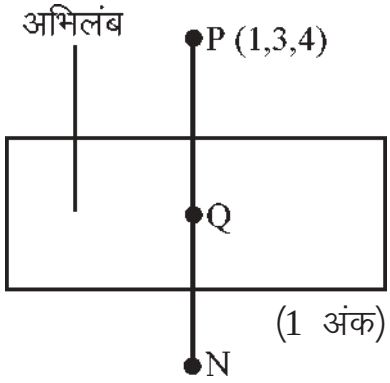
प्रश्न–13 का अथवा का उत्तर–

दिए गए समतल का समीकरण है–

$$2x - y + z + 3 = 0$$

समतल ($\pm$) के अभिलंब के दिक् अनुपात है।

$$(2, -1, 1)$$



माना बिन्दु P (1, 3, 4) से समतल ($\pm$) पर डाले गए लंब का लंबपाद Q है बिन्दु (1, 3, 4) से समतल (I) पर डाला गया लंब PQ समतल के अभिलंब के समांतर होगा। (1 अंक)

बिन्दु (1, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{1} = k \qquad \text{.....(II) (1 अंक)}$$

रेखा (II) पर कोई बिन्दु $(2k + 1 , -k + 3 , k + 4)$ होगा

यदि यह बिन्दु समतल (I) पर स्थित है तो यह समतल (I) के समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad 2(2k+1)-(-k+3) + K+4+3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4k + 2 + k - 3 + k + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6k = -6 \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$\Rightarrow \quad k = -1$$

अतः बिन्दु Q के निर्देशांक होंगे

$$2(-1) + 1, -1(-1) + 3 , -1 + 4$$

अर्थात्– $(-1, 4, 3)$ (1 अंक)

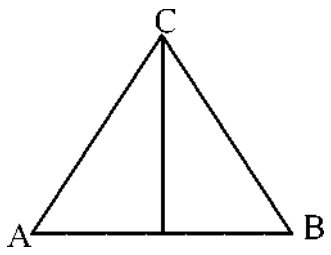
माना बिन्दु P (1, 3, 4) का प्रतिबिंब N (x_1 , y_1 , z_1) है तब Q, PN का मध्य बिन्दु होगा

$$\therefore \quad \frac{x_1+1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$$

$$\frac{y_1+3}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 5$$

$$\frac{z_1+4}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2 \qquad (1 \text{ अंक})$$

अतः बिन्दु (1, 3, 4) का समतल I पर प्रतिबिंब N (–3 , 5 , 2) होगा **उत्तर उत्तर–14.**



त्रिभुज ABC में बिन्दु A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ है।

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}\right|$ (1 अंक)

के अनुसार, जहाँ–

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{a}$$

तथा $\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{b}$ है (1 अंक)

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\left(\vec{C} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{C} - \vec{b}\right)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{C} \times \vec{C} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{C} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}\right|$$

चूँकि $\vec{C} \times \vec{C} = 0$ (1 अंक)

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}\right|$

क्योंकि $-\vec{a} \times \vec{c} = \vec{C} \times \vec{a}$

तथा $\vec{C} \times \vec{b} = b \times c$ से (1 अंक)

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}\right|$ होगा .....(I)

किन्तु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई सूत्र से

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\vec{b} - \vec{a}\right| \times h$ .....(II)

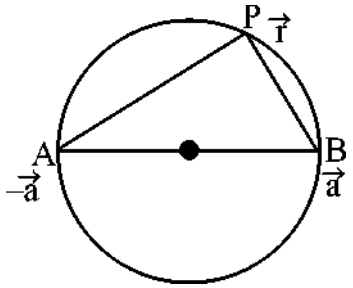
[जहाँ आधार $\overrightarrow{AB} = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$ तथा ऊँचाई माना h है]

समीकरण (I) तथा (II) से

$$\frac{1}{2}\left|\vec{b} - \vec{a}\right| \times h = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}\right|$$

$$\therefore \quad h = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|} \qquad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न–14 का अथवा का उत्तर–



(1 अंक)

माना $\overrightarrow{AB}$ वृत्त का व्यास है तथा O बिन्दु है $\vec{A}$ के स्थिति सदिश $-\vec{a}$ तथा $\vec{B}$ के स्थिति सदिश $+\vec{a}$ है। केन्द्र के स्थिति सदिश O है। (1 अंक)

परिधि पर कोई बिन्दु P है, जिसके स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

चूँकि सिद्ध करना है कि अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है, अतः कोण की दो भुजाओं $\overrightarrow{PA}$ तथा $\overrightarrow{PB}$ के बीच बना कोण 90° होगा, अर्थात् $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PA} = 0$ होना चाहिए। (1 अंक)

अतः $\quad \overrightarrow{PA} = \left(\vec{a}-\vec{r}\right)$

तथा $\quad \overrightarrow{PB} = \left(-\vec{a}-\vec{r}\right)$

चूँकि $\quad \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \left(\vec{a}-\vec{r}\right).\left(-\vec{a}-\vec{r}\right)$

$$= -\vec{a}.\vec{a}+\vec{r}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{r}+\vec{r}.\vec{r}$$

$$= |\vec{a}|^2$$

$$= \left|\vec{r}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2 \qquad (1 \text{ अंक})$$

चूँकि वृत्त में केन्द्र से परिधि के किसी भी बिन्दु तक की दूरी समान होती है अतः

$$\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{a}\right| \quad \therefore \quad \left|\vec{r}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2 = 0 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = 0 \qquad \text{यही सिद्ध करना था}$$

उत्तर–15

दिया है $\quad f(1) = 2 \qquad (1 \text{ अंक})$

R.H.L. के लिए $\quad f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h)$

$$= \lim_{h\to 0} (1+h)^2$$

$$= \lim_{h\to 0} 1+2h+h^2$$

$$= 1 \qquad (1\tfrac{1}{2} \text{ अंक})$$

L.H.L. के लिए $f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h)$

$= \lim_{h\to 0} (1-h)^2$

$= \lim_{h\to 0} 1 - 2h + h^2$

$= 1$ (1½ अंक)

चूँकि फलन की R.H.L. = L.H.L. = $1 \neq 2$

(फलन का बिन्दु 1 पर मान)

अर्थात $f(1+0) = f(1-0) \neq f(1)$

अतः फलन बिन्दु $x = 1$ पर असतत है (1 अंक)

उत्तर–15

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cot x}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cot x}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{x\to 0} 2\times\left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right] \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$$

$\therefore$ $= 2 \times 1$ (1 अंक)

$= 2$ उत्तर

उत्तर–16

$$I = \int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$$

$$I = \int \sqrt{a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)}\, dx \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$I = \int \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\, dx$$

माना $x - a = t$ (1 अंक)

∴ अवकलन करने पर $dx = dt$

अतः $$I = \int \sqrt{a^2 - t^2}\, dt$$

सूत्र $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} \right]$ से (1 अंक)

$$I = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{a^2 - t^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{t}{a} \right] \qquad (1 \text{ अंक})$$

अतः $\frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{a^2 - (x-a)^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x-a}{a} \right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a} \right]$$

(1 अंक)

प्रश्न–16 का अथवा का उत्तर

$$\int x^2 \sin^{-1} \times dx$$

खंडशः समाकलन द्वारा–

सूत्र से $\sin^{-1} \times . \int x^2\, dx - \int \left[\left\{ \frac{d}{dx}\sin^{-1} x \right\} \times \int x^2 dx \right] dx$ (1 अंक)

$$= \sin^{-1} x \, . \left(\frac{x^3}{3} \right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{x^3}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \text{.....(I)}$$

(1 अंक)

माना $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = I$$

अतः $$I = \int \frac{x^2 . x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

में माना $1 - x^2 = t^2$ अतः $-xdx = tdt$

$$I = \int \frac{(1-t^2)\,(-t)\, dt}{t} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= \int -1\ (1 - t^2)dt$$

$$I = \left[-t + \frac{t^3}{3}\right]$$

$t = \sqrt{1-x^2}$ रखने पर

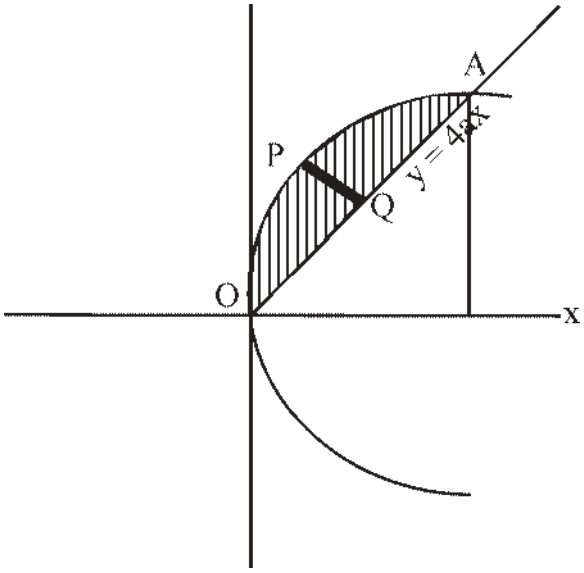
$$I = \left[-\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right]$$ (1 अंक)

(I) में I का मान रखने पर

$$\frac{x^3}{3}\ \sin^{-1} x - \frac{1}{3}\left[-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}.\sin^{-1}x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}$$ (1 अंक)

उत्तर–17



(1 अंक)

दिए गए वक्र $y^2 = 4ax$ तथा $y = mx$ है

अतः $m^2x^2 = y^2$ का मान

$y^2 = 4ax$ में रखने पर

$m^2x^2 = 4ax$

$\Rightarrow$ $m^2x^2 - 4ax = 0$

$x\ (m^2x - 4a) = 0$

अतः $x = 0$ या $x = \frac{4a}{m^2}$ (1 अंक)

यदि $x = 0$ तो $y = mx$ से $y = 0$

तथा $x = \frac{4a}{m^2}$ तो $y = mx$ से $y = \frac{4a}{m}$

अतः वक्र $y^2 = 4ax$ तथा $y = mx$ का प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) तथा $\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ है।

(1 अंक)

अतः उभयनिष्ठ क्षेत्र की सीमाएँ $x = 0$ तथा $x = \frac{4a}{m^2}$

$$x = \int_0^{4a/m^2} RQ\ dx \quad \text{है}$$

$$S = \int_0^{4a/m^2} (y_1 - y_2)\ dx \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$= \int_0^{4a/m^2} \left(\sqrt{4ax} - mx\right) dx \qquad \text{(½ अंक)}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{4a/m^2} - m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a/m^2} \qquad \text{(½ अंक)}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[\frac{4a}{m^2}\cdot\frac{\sqrt{4a}}{m} - 0\right] - \frac{m}{2}\left[\frac{16a^2}{m^4} - 0\right]$$

$$= \frac{32a^2}{3m^3} - \frac{8a^2}{m^3} \qquad \text{(½ अंक)}$$

$$= \frac{8a^2}{3m^3} \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न–17 का अथवा का उत्तर–

$$\int_0^{\pi/4} \log\ (1 + \tan x)\ dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$$

हल– $$I = \int_0^{\pi/4} \log\ (1 + \tan x)\ dx \qquad \text{.....(I)}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\ \{1 + \tan\ (\frac{\pi}{4} - x)\}\ dx \qquad \text{(1 अंक)}$$

प्रगुण $$\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log \left\{1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan x}\right\} dx$$

(1 अंक)

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right\} dx \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\ 2\ dx - \int_0^{\pi/4} \log\ (1 + \tan\ x)\ dx$$

$$I = \log\ 2\ .\ [x]_0^{\pi/4} - I$$

$$2I = \log\ 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] \qquad (½ \text{ अंक})$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\ \log_e 2 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$I = \frac{\pi}{8}\ \log_e 2 \qquad (½ \text{ अंक})$$

उत्तर–18 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(1+\cos 2y)}{(1-(\cos 2x)} = 0$$

हल–
$$\frac{dy}{dx} + \frac{2.\cos^2 y}{2.\sin^2 x} = 0 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^2 y}{\sin^2 x} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{\cos^2 y} = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\int \sec^2 y\ dy = -\int \text{cosec}^2\ x\ dx \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\tan\ y = \cot\ x\ +\ c \qquad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न–18 का अथवा का हल

दिया है वक्र कुल का समीकरण

$$y = Ae^{2x} + Be^{-2x}\ (-2) \qquad .....(1)$$

अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = A\ .\ e^{2x}\ .\ 2 + B\ e^{-2x} \qquad (1 \text{ अंक})$$

पुनः अवकलन से–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{2x}\ .\ 2.2 + Be^{-2x}\ (-2)\ (-2) \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4\,Ae^{2x} + 4e^{-2x} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4\,[Ae^{2x} + Be^{-2x}] \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4y \qquad \text{(समीकरण (I) से)} \quad (½ \text{ अंक})$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \qquad (½ \text{ अंक})$$

उत्तर–19

यदि पेन के खराब होने की प्रायिकता p हो तो

$$p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \qquad (1 \text{ अंक})$$

तथा पेन के खराब न होने की प्रायिकता

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10} \qquad (1 \text{ अंक})$$

कम–से–कम 1 पेने खराब होने की प्रायिकता हेतु यदि खराब पेनों को x द्वारा निरूपित करें तो–

$$p\,(x = 1) + p\,(x = 2) + p\,(x = 3) + p\,(x = 4) + p\,(x = 5) \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$= 1 - p\,(0)$$

$$= 1 - S_{c_0}\, p^0\, q^5 \qquad [\text{सूत्र } n_{C_r}\, p^r q^{n-r} \text{ द्वारा}]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \qquad [\because S_{C_0} = 1 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= 1 - \frac{9^5}{10^5} \qquad \textbf{उत्तर} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\text{or} = 1 - 0.59049 \qquad \textbf{उत्तर}$$

$$\text{or} = 0.40951 \qquad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न–19 का अथवा का उत्तर–

यदि A तथा B दोनों आवेदन देते हैं तो A के चयन की प्रायिकता–

$$P\,(A) = \frac{1}{4}$$

A के चयन न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ (1 अंक)

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad (1 \text{ अंक})$$

B के चयन होने की प्रायिकता $= P(B) = \frac{1}{6}$ (½ अंक)

∴ B के चयन न होने की प्रायिकता–

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{6} \quad \text{(1 अंक)}$$

$$= \frac{5}{6} \quad \text{(½ अंक)}$$

अतः A और B दोनों के चयन न होने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \quad \text{(½ अंक)}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{8} \quad \text{(½ अंक)}$$

प्रश्न–20

दी गई रेखाओं का समीकरण है–

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{.....(1)}$$

एवं $$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{.....(2)}$$

बिन्दु (–1, 3, –2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण–

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-3}{b} = \frac{z+2}{c} \quad \text{.....(3)} \quad \text{(1 अंक)}$$

समीकरण (1) और (3) परस्पर लम्बवत हैं–

∴ $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

$\Rightarrow \quad 1 \times a + 2b + 3c = 0 \quad \text{.....(4)} \quad \text{(1 अंक)}$

दिया गया है–

रेखा (2) एवं (3) परस्पर लम्बवत् हैं–

∴ $\quad -3a + 2b + 5c = 0 \quad \text{.....(5)} \quad \text{(1 अंक)}$

समीकरण (4) व (5) से–

$$\frac{a}{2\times5 - 2\times3} = \frac{b}{(-3)(3) - (5)\times(1)} = \frac{c}{(1)(2) - (2)(-3)}$$

(1 अंक)

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{4} = \frac{b}{-14} = \frac{c}{8} = k \text{ (माना)}$$

$$\Rightarrow \quad a = 4k \text{ , } b = -14k \text{ , } c = 8k \quad \text{(1 अंक)}$$

a, b, c का मान समीकरण (3) में रखने पर–

$$\frac{x+1}{2k} = \frac{y-3}{-7k} = \frac{z+2}{4k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z+2}{4}$$ (1 अंक)

यही सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न–20 का अथवा का उत्तर

गोले का समीकरण है–

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \text{.....(1)}$$ (½ अंक)

गोला (1) बिन्दु (1, 1, 1,) से होकर जाता है

$$\therefore \quad (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + 2u.1 + 2v.1 + 2w.1 + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2u + 2v + 2w + d + 3 = 0 \quad \text{.....(2)}$$ (½ अंक)

समीकरण (1) बिन्दु (1, 2, 1) से होकर जाता है–

$$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2u.1 + 2v.2 + 2w.1 + d = 0$$ (½ अंक)

$$\Rightarrow \quad 2u + 4v + 2w + d + 6 = 0 \quad \text{.....(3)}$$ (½ अंक)

इसी प्रकार गोला (1) बिन्दु (1, 1, 2) से होकर जाता है–

$$\therefore \quad 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2u.1 + 2v.1 + 2w.2 + d = 0$$ (½ अंक)

$$\Rightarrow \quad 2u + 2v + 4w + d + 6 = 0 \quad \text{.....(4)}$$ (½ अंक)

एवं (1) बिन्दु (2, 1, 1) से होकर गुजरता है–

$$\therefore \quad 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2u.2 + 2v.1 + 2w.1 + d = 0$$ (½ अंक)

$$\Rightarrow \quad 4u + 2v + 2w + d + 6 = 0 \quad \text{.....(5)}$$ (½ अंक)

समीकर (5) में से समीकरण (2) को घटाने पर–

$$2u + 3 = 0$$

$$u = -\frac{3}{2}$$ (½ अंक)

समीकरण (3) में से (2) को घटाने पर

$$2v + 3 = 0$$

$$\therefore \quad v = -\frac{3}{2}$$ (½ अंक)

समीकरण (4) में से (2) को घटाने पर–

$$2w + 3 = 0$$

$$w = -\frac{3}{2}$$ (½ अंक)

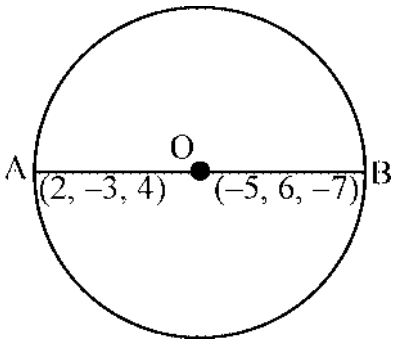
समीकरण (2) में 2u, 2v, 2w के मान रखने पर–

$$d = 6$$

समीकरण (1) में 2u, 2v, 2w एवं d के मान रखने पर–

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$ (½ अंक)

उत्तर–21



(1 अंक)

माना कि A एवं B अभीष्ट वृत्त के व्यास के दो सिरे हैं, जिसके निर्देशांक (2, –3, 4) एवं (–5, 6, –7) हैं–

$\therefore$ A के स्थिति सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

एवं B के स्थिति सदिश $\vec{b} = -5\hat{i} - 6\hat{j} + 7\hat{k}$ (1 अंक)

A एवं B व्यास वाले गोले का सदिश समीकरण–

$$\left(\vec{r} - \vec{a}\right).\left(\vec{r} - \vec{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\vec{r} - \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}\right)\right].\left[\vec{r} - \left(-5\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}\right)\right] = 0 \quad \text{.....(1)} \quad (1 \text{ अंक})$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ रखने पर

$$\left[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right]\left[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + 5\hat{i} - 6\hat{j} + 7\hat{k}\right] = 0 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\Rightarrow \left[(x-2)\hat{i} + (y+3)\hat{j} + (z-4)\hat{k}\right]\left[(x+5)\hat{i} + (y-6)\hat{j} + (z+7)\hat{k}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $(x - 2)(x + 5) + (y + 3)(y - 6) + (z - 4)(z + 7) = 0$ (1 अंक)

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 3z - 56 = 0$ 2

समीकरण (2) गोले का कार्तीय समीकरण है–

समीकरण (2) से स्पष्ट है कि गोले का केन्द्र $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ एवं त्रिज्या

(1 अंक)

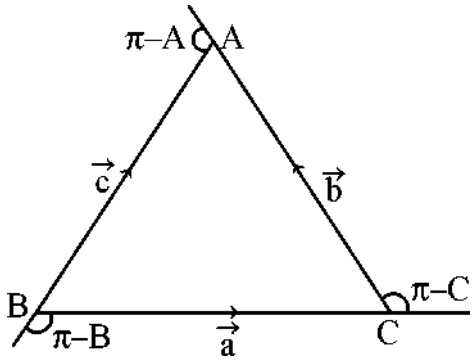
$$\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 56} = \frac{\sqrt{251}}{4} \text{ है} \quad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न–21 का अथवा का उत्तर–

ज्या नियम से माना कि ABC एक त्रिभुज है जिसका भुजाओं $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ एवं $\overrightarrow{AB}$ के अनुदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ सदिश है। तब सदिश योग त्रिभुज नियम से

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad \text{.....(1)} \quad (1 \text{ अंक})$$

समीकरण (1) के दोनों ओर सदिश $\vec{a}$ का सदिश गुणन करने पर–



(1 अंक)

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{0} \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad 0+\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \qquad \text{.....(2)}$$

इसी प्रकार

$$\vec{b}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{b}\times\vec{0} \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{a}+0+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{c} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \qquad \text{.....(3)}$$

समीकरण (2) एवं (3) से–

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

$$\Rightarrow \quad ab \sin(\pi - c) = bc \sin(\pi - A) = ca \sin(\pi - B)$$

$$\Rightarrow \quad ab \sin c = bc \sin A = ca \sin B \qquad \text{(½ अंक)}$$

abc से भाग देने पर

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad \text{(½ अंक)}$$

प्रश्न–पत्र ब्लू प्रिन्ट
परीक्षा – हायर सेकेण्डरी

कक्षा–12 पूर्णांक–100

विषय– उच्च गणित समय–3 घण्टा

क्र.	इकाई	इकाई पर निर्धारित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या			कुल प्रश्न
			1 अंक	4 अंक	5 अंक	6 अंक	
1.	आंशिक भिन्न	05	01	01	–	–	01
2.	प्रतिलोम फलन	05	01	01	–	–	01
3.	समतल ज्यामितीय						
4.	समतल	15	04	–	01	01	02
5.	सरल रेखा एवं गोला						
6.	सदिश						
7.	सदिशों का गुणनफल	15	04	–	01	01	02
8.	सदिशों का त्रिविमीय ज्यामितीय में अनुप्रयोग						
9.	फलन, सीमा तथा सांतत्य	05	–	–	01	–	01
10.	अवकलन	10	02	02	–	–	02
11.	कठिन अवकलन						
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	05	01	01	–	–	01
13.	समाकलन						
14.	कठिन समाकलन	15	05	–	02	–	02
15.	निश्चित समीकलन						
16.	अवकल समीकरण	05	–	–	01	–	01
17.	सहसंबंध	05	01	01	–	–	01
18.	समाश्रयण	05	01	01	–	–	01
19.	प्रायिकता	05	–	–	01	–	01
20.	आंकिक विधियाँ	05	05	–	–	–	–
	कुल	100	25	07	07	02	16