

प्रश्न-पत्र ब्लू प्रिन्ट
परीक्षा – हायर सेकेण्डरी

कक्षा-12

पूर्णांक-100

विषय- उच्च गणित

समय-3 घण्टा

क्र.	इकाई	इकाई पर निर्धारित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या			कुल प्रश्न
				1 अंक	4 अंक	5 अंक	
1.	आंशिक भिन्न	05	01	01	—	—	01
2.	प्रतिलोम फलन	05	01	01	—	—	01
3.	समतल ज्यामितीय	15	04	—	01	01	02
4.	समतल						
5.	सरल रेखा एवं गोला	15	04	—	01	01	02
6.	सदिश						
7.	सदिशों का गुणनफल						
8.	सदिशों का त्रिविमीय ज्यामितीय में अनुप्रयोग	05	—	—	01	—	01
9.	फलन, सीमा तथा सांतत्य						
10.	अवकलन	10	02	02	—	—	02
11.	कठिन अवकलन						
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	05	01	01	—	—	01
13.	समाकलन	15	05	—	02	—	02
14.	कठिन समाकलन						
15.	निश्चित समीकलन						
16.	अवकल समीकरण	05	—	—	01	—	01
17.	सहसंबंध	05	01	01	—	—	01
18.	समाश्रयण	05	01	01	—	—	01
19.	प्रायिकता	05	—	—	01	—	01
20.	आंकिक विधियाँ	05	05	—	—	—	—
कुल		100	25	07	07	02	16

हायर सेकण्डरी स्कूल परीक्षा— 2012—13
HIGHER SECONDARY SCHOOL EXAMINATION-2012-13

प्रादर्श प्रश्न—पत्र
Model Question Paper

उच्च गणित
HIGHER MATHEMATICS
(Hindi and English Versions)

Time— 3 घंटे

Maximum Marks—100

निर्देश—

- (1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न के साथ आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।
- (2) प्रश्न-1 A, B, C, D, E वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं प्रत्येक का 1 अंक निर्धारित है।
- (3) प्रश्न-2 से प्रश्न 8 तक के प्रश्नों के प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक निर्धारित हैं।
- (4) प्रश्न-9 से प्रश्न 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक प्रश्न के 5 अंक निर्धारित हैं।
- (5) प्रश्न- 16 व 17 के निर्धारित अंक 6 हैं।

Instructions

- (1) All question are compulsory internal choices are given in every question.
- (2) Question-1 A, B, C, D, E are objective type and 1 marks allotted to each question.
- (3) Question-2 to 8 carries 4 marks each.
- (4) Question-9 to 15 carries 5 marks each.
- (5) Question-16 and 17 carries 6 marks each.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न-1 (A) निम्नलिखित प्रश्नों के साथ दिए गए विकल्पों में से सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए—

5

(i) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \dots\dots\dots$ होगा—

(a) $\tan^{-1} \frac{1}{6}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{6}$

(ii) तीन सदिश जो त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से दिष्ट मध्यिकाओं से निर्धारित हैं, का योग है—

(a) $\vec{0}$

(b) 1

(c) $-\frac{1}{3}$

(d) -1

(iii) यदि \vec{a} का अशून्य सदिश जिसका मापांक a है तथा m का एक अशून्य सदिश

है। तब $m\vec{a}$ एकांक सदिश होगा।

(a) $m = \pm 1$ (b) $m = |\vec{a}|$

(c) $m = \frac{1}{|\vec{a}|}$ (d) 0

(iv) एक चर त्रिज्या रखने वाले गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या 4 सेमी है। इसके आयतन परिवर्तन की दर होगा।

(a) 64π घन सेमी/सेकन्ड (b) 32π सेमी/सेकन्ड

(c) 48π सेमी/सेकन्ड (d) 72π सेमी/सेकन्ड

(v) सदिशों $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ और $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ के बीच कोण है-

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

Q.-1 (A) Choose the correct choice from the following multiple choice question **5**

(i) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \dots\dots\dots$ —

(a) $\tan^{-1} \frac{1}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(ii) The sum of three vectors from the vertices of triangle toward median are

(a) $\vec{0}$ (b) 1

(c) $-\frac{1}{3}$ (d) -1

(iii) If \vec{a} is a non-zero vector whose resultant is a. m is an another non-zero vector. $m\vec{a}$ is a unit vector

(a) $m = \pm 1$ (b) $m = |\vec{a}|$

(c) $m = \frac{1}{|\vec{a}|}$ (d) 0

(iv) A balloon has a variable radius of 4 cm. The rate of changing in volume is-

(a) 64π cm³/sec. (b) 32π cm³/sec.

(c) 48π cm³/sec. (d) 72π cm³/sec.

(v) The angle between the vector $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ and $2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ is-

- (a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$
 (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

प्रश्न-1 (B) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

5

- (i) यदि $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ हो, तो $B = \dots\dots\dots$ ।
 (ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} \dots\dots\dots$ जबकि θ , \vec{a} व \vec{b} के बीच का कोण है।
 (iii) यदि $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\dots\dots \infty$ तब $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 (iv) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ का मान $\dots\dots\dots$ है।
 (v) $\int \sec x dx$ का मान $\dots\dots\dots$ है।

Q.-1 (B) Fill in the blanks

5

- (i) If $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ then $B = \dots\dots\dots$
 (ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} \dots\dots\dots$ when θ , is angle between the vector \vec{a} and \vec{b} .
 (iii) If $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\dots\dots \infty$ then $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 (iv) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots\dots\dots$
 (v) $\int \sec x dx \dots\dots\dots$

प्रश्न-1 (C) सत्य/असत्य लिखिए-

5

- (i) $\int \cot x dx = \log \sin x$
 (ii) समाकलन, अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है।
 (iii) $\sin x$ का x के सापेक्ष समाकलन $\cos x$ होता है।
 (iv) सह-संबंधक गुणांक का मान सदैव धनात्मक होता है।
 (v) यदि $b_{yx} = 1.2$ तब $b_{xy} = 1.4$ होता है।

Q.-1 (C) True / False

5

- (i) $\int \cot x dx = \log \sin x$
 (ii) Intigration is inverse process of differentiation
 (iii) the integration of $\sin x$, with respect to x is $\cos x$.

(iv) The value of correlation coefficient always positive

(v) If $b_{yx} = 1.2$ then $b_{xy} = 1.4$.

प्रश्न-1 (D) स्तंभ "A" से स्तंभ "B" का जोड़ी मिलान कीजिए – 5

(i) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$ (a) $\sqrt{82}$

(ii) बिन्दुओं (2, 4, 5) व (2, 5, -4) के बीच की दूरी होगी (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(iii) बिन्दुओ (4, 3, 5) की XZ समतल से दूरी होगी (c) $\sqrt{10}$

(iv) बिन्दु (1, 2, 3) की y-अक्ष से लम्बवत् दूरी होगी (d) 13

(v) एक रेखाखण्ड का निर्देशांकों पर प्रक्षेप (3, 4, 12) है तब रेखा की लम्बाई होगी (e) 3

Q.-1 (D) Match the column– 5

(i) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$ (a) $\sqrt{82}$

(ii) The distance between the points (2, 4, 5) and (2, 5, -4) (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(iii) The distance of points (4, 3, 5) from the XZ plane (c) $\sqrt{10}$

(iv) Perpendicular distance of points (1, 2, 3) y-axis (d) 13

(v) The projection of line segment of (3, 4, 12) then length of line. (e) 3

प्रश्न-1 (E) एक वाक्य में उत्तर लिखिए– 5

(i) मिथ्या स्थिति विधि का पुनरावृत्ति सूत्र लिखिए।

(ii) न्यूटन रेफसन विधि का सूत्र लिखिए।

(iii) समलम्ब चतुर्भुज नियम का सूत्र लिखिए।

(iv) सिम्पसन के नियम का सूत्र लिखिए।

(v) $0.5125 E 03 \times 0.4021 E - 02$ का गुणनफल क्या होगा?

Q-1. (E) Write the answer of following questions in one sentence– 5

(i) If iteration formula for false position method.

(ii) Write the formula for Newton Raphson method.

(iii) Write the formula is Trapezoidal rule.

(iv) Write the formula is simpson's rule

(vi) Find the value of–

$$0.5125 \text{ E } 03 \times 0.42021 \text{ E } - 02$$

प्रश्न-2 $\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)}$ के आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

4

अथवा

$\frac{x+3}{(x+2)(x^2-9)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

Divide into partial fraction - $\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)}$

or

Divide into partial fraction- $\frac{x+3}{(x+2)(x^2-9)}$

प्रश्न-3. सिद्ध कीजिए कि–

4

$$\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि– $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

Prove that - $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$

or

Prove that– $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

प्रश्न-4. प्रथम सिद्धांत से $\sin 2x$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

4

अथवा

यदि $y = e^{x+e^{x+\dots\infty}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$$

Differentiate by first principle of $\sin 2x$

or

If $y = e^{x+e^{x+\dots\infty}}$ then prove that– $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$

प्रश्न-5. यदि $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots\infty}}}$

4

हो तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$

अथवा

यदि $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

If $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots \infty}}}$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$

or

If $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ then prove that value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-6. एक कण समीकरण $S = 5 e^{-t} \cos t$ के अनुसार गति करता है। यदि $t = \frac{\pi}{2}$ हो तो उसका वेग व त्वरण ज्ञात कीजिए। (4)

अथवा

एक पत्थर ऊपर की ओर फेंका जाता है। इसकी गति का समीकरण $S = 490 t - 4.9 t^2$ है। पत्थर द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिए। जहाँ t व S क्रमशः सेकण्ड व मीटर में है।

Equation of a moving partical $S = 5 e^{-t} \cos t$. If $t = \frac{\pi}{2}$ then find its velocity and accelaration.

or

A stone is thrown upward and the equation of its velocity is $S = 490 t - 4.9 t^2$ where, t and S are in second and meter respectively. Calculate the maximum height adopted by stone.

प्रश्न-7. सह-संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए—

$\text{cov}(x, y) = -2.25$, $\text{var}(x) = 6.25$, $\text{var}(y) = 20.25$ (4)

अथवा

दो चर राशियों x व y के मध्य सह-संबंध गुणांक r हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

जहाँ σ_x^2 , σ_y^2 , σ_{x-y}^2 , क्रमशः x , y तथा $(x - y)$ के विचरण गुणांक है।

Find the correlation coefficient, if given that—

$\text{cov}(x, y) = -2.25$, $\text{var}(x) = 6.25$, $\text{var}(y) = 20.25$

or

If r is the correlation coefficient between x and y then show that—

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

where σ_x^2 , σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are the variants of x , y and $(x - y)$ respectively.

प्रश्न-8. समाश्रयण रेखाओं $2x - 9y + 6 = 0$ एवं $x - 2y + 1 = 0$ के लिए सह-संबंध की गणना कीजिए

अथवा

निम्नांकित सारणी द्वारा ग्वालियर में 100 रुपए मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक उचित मूल्य आँकड़ों द्वारा ज्ञात कीजिए।

शहर	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	70	75
मानक विचलन	2.5	3.0

दोनों नगरों में वस्तु के मूल्यों में सह-संबंध गुणांक 0.8 है।

Given the regression lines as $2x - 9y + 6 = 0$ and $x - 2y + 1 = 0$ respectively calculate the correlation coefficient

or

An article cost Rs. 100 at Gwalior and the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data

City	Gwalior	Bhopal
Mean value	70	75
Standard deviation	2.5	3.0

The correlation between the value of the two cities is 0.8

प्रश्न-9. उन समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $x - 2y + 2z = 3$ के समांतर हैं तथा जिनकी बिन्दु $(1, 2, 3)$ से लाम्बिक दूरी 1 है। (5)

अथवा

सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर समतलों $2x - 2y + z + 3 = 0$ और $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ के बीच की दूरी $\frac{1}{6}$ है।

Q.- 9. Find the equation of the plane which are parallel to the plane $x - 2y + 2z = 3$ and whose perpendicular distance from the point $(1, 2, 3)$ is 1. (5)

or

Show that the distance between two parallel plane $2x - 2y + z + 3 = 0$ and $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ is $\frac{1}{6}$.

प्रश्न-10. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ का अदिश गुणनफल और उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिए। (5)

अथवा

सदिशों $3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $7\hat{i} + \hat{j}$ से बने त्रिभुज की परिमाप ज्ञात कीजिए।

Q.-10- Find the scalar product of vector $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

and also find the angle between them

or

Find the perimeter of a triangle made by vectors $3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $7\hat{i} + \hat{j}$ respectively.

प्रश्न-11. निम्नांकित फलन के सांतत्य की विवेचना कीजिए। (5)

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad x = 1 \text{ पर}$$

अथवा

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x-2)}{(x+8)(x-1)} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

Clarify the continuity of following function

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \text{at } x = 1$$

or

Find the value of— $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x-2)}{(x+8)(x-1)}$

प्रश्न-12. रेखा $y = x$ एवं परवलय $y^2 = 16x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (5)

अथवा

परवलय $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Q.12– Find the area included between the parabola $y^2 = 16x$ and the line $y = x$

or

Find the area included between the parabola $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$

प्रश्न-13. $\int \frac{dx}{5-4 \sin x}$ का समाकलन ज्ञात कीजिए।

अथवा

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = \frac{\pi}{4} \text{ को सिद्ध कीजिए।}$$

Find the integral coefficient of $\int \frac{dx}{5-4 \sin x}$

or

Prove that— $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न-14. सिद्ध करो कि फलन (5)

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ अवकलन समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$ का एक हल है।

अथवा

अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ को हल कीजिए।

Q.14– Show that the function $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ is a solution of differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6.$$

or

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

प्रश्न-15. यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इसमें 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

अथवा

52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 पत्ते निकाले जाते हैं, इनके लाल या इक्का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Q.15– Find the probability that a leap year, selected at random will contain 53 sundays

or

Two cards are drawn at random from a pack 52 cards. What is the probability that either both are red or both are aces.

प्रश्न-16. सरल रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$ और $(1, -3, 0)$ से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र समतल $x + y + z = 0$ पर स्थित है।

Q.16– Find the minimum distance between straight lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$

or

Find the equation of the sphere which passes through the points $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$ and $(1, -3, 0)$ and whose centre lies on the plane $x + y + z = 0$.

प्रश्न-17. सिद्ध करो -

$$[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$$

अथवा

15 इकाई का एक बल $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में कार्य करता है। तथा बिन्दु $2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ से गुजरता है। इस बल का बिन्दु $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ के पदितः सदिश आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Q.17- Prove that

$$[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$$

or

A force of 15 unit acts along the $(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ and passes through the points $(2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$. Find the vector moment of it about the points $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

आदर्श उत्तर

Q.-1 (A)

(i) (c) $\frac{\pi}{4}$

(ii) (a) $\vec{0}$

(iii) (c) $m = \frac{1}{|\vec{a}|}$

(iv) (a) $64\pi \text{ cm}^3/\text{sec.}$

(v) (d) $\frac{\pi}{2}$

Q. 1 (B)

(i) $B = -1$

(ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$

(iii) $\frac{dy}{dx} = e^x$

(iv) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

(v) $\log(\sec x + \tan x)$

Q. 1 (C)

(i) सत्य

(ii) सत्य

(iii) असत्य

(iv) असत्य

(v) असत्य

Q. 1 (D)

(i) (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(ii) (a) $\sqrt{82}$

(iii) (e) 3

(iv) (d) 13

(v) (c) $\sqrt{10}$

Q. 1 (E)

(i) $x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$

(ii) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(iii) $\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + Y_{n-1})]$

(iv) $\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + Y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + Y_{n-2})]$

(v) 0.20607625 E 01

उत्तर-2. माना कि

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \dots\dots\dots(1)$$

$(x-1)(x-2)$ से समीकरण (1) के दोनों ओर गुणा करने पर-

$$2x+5 = A(x-2) + B(x-1) \dots\dots\dots(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

$x = 2$ रखने पर

$$2 \times 2 + 5 = 0 + B(2-1)$$

\Rightarrow $B = 9$ (1 अंक)

और $x = 1$ रखने पर

$$2 \times 1 + 5 = A(1-2) + 0$$

$$A = -7 \quad (1 \text{ अंक})$$

समीकरण (1) में $A = -7$ और $B = 9$ रखने पर-

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)} = -\frac{7}{x-1} + \frac{9}{x-2} \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर-

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x+2)(x^2-9)} &= \frac{x+3}{(x+2)(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

माना $\frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \dots\dots\dots(1)$

$(x+2)(x-3)$ से समीकरण (1) के दोनों ओर गुणा करने पर

$$1 = A(x-3) + B(x+2) \dots\dots\dots(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

$x = 3$ रखने पर-

$$1 = 0 + B(3+2)$$

$$B = \frac{1}{5} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$x = -2 \text{ रखने पर-} \quad 1 = A(-2-3) + 0$$

$$A = -\frac{1}{5} \quad (1 \text{ अंक})$$

समीकरण (1) में $A = -\frac{1}{5}$ और $B = \frac{1}{5}$ रखने पर

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{5(x+2)} + \frac{1}{5(x-3)}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{x+3}{(x+2)(x^2-9)} = -\frac{1}{5(x+2)} + \frac{1}{5(x-3)} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर-3. हम जानते हैं कि-

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} \right)$$

अब $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ रखने पर

$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \tan^{-1} \left(\frac{1+2+3-1 \times 2 \times 3}{1-1 \times 2-2 \times 3-3 \times 1} \right) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{6-6}{1-2-6-3} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{0}{-10} \right)$$

$$= \tan^{-1}(0) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \pi \text{ या } 0 \quad (1 \text{ अंक})$$

परन्तु, तीन धनात्मक कोणों का मान शून्य नहीं हो सकता।

$$\text{अतः} \quad \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \pi \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर-

$$\text{L.H.S.} = \cos^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{5}{13} \right)$$

$$= \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} + \sin^{-1} \left(\frac{5}{13} \right) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{16}{25}} + \sin^{-1} \left(\frac{5}{13} \right)$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{5}{13} \right)$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{3}{5} \sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \frac{5}{13} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \right] \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} \right] \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{36}{65} + \frac{20}{65} \right]$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{56}{65} \right)$$

$$= \cos^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{56}{65} \right)^2}$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{33}{65} \right) \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर-4. माना-

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x \\ f(x+h) &= \sin 2(x+h) \\ &= \sin(2x+2h) \end{aligned} \quad (1 \text{ अंक})$$

हम जानते हैं कि-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+2h+2x}{2} \sin \frac{2x+2h-2x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x+h) \sin h}{h} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cos(2x+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= 2 \cos(2x+0) \times 1$$

$$= 2 \cos 2x \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर-

दिया गया है-

$$y = e^{x+e^{x+\dots\infty}}$$

$$y = e^{x+y} \quad (1 \text{ अंक})$$

log लेने पर

$$\log y = \log e^{x+y}$$

$$\log y = (x+y) \log e$$

$$(\log e = 1)$$

$$\log y = x + y \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\log y - y = x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर—

$$\frac{d}{dx} (\log y - y) = \frac{d}{dx} (x)$$

$$\frac{d}{dx} \log y - \frac{dy}{dx} = 1 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$$

उत्तर—5. दिया गया है—

$$y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots \infty}}}$$

$$y = \sqrt{\log x + y} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$y^2 = \log x + y \quad (1 \text{ अंक})$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर—

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)} \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर—

दिया है—

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2}$$

(1 अंक)

$$= \frac{(1 + \cos x) \cos x - \sin x (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x} \quad (2 \text{ अंक})$$

उत्तर-6- दिया है

x के सापेक्ष अवकलन करने पर-

$$s = 5 e^{-t} \cos t$$

$$v \text{ वेग} = \frac{ds}{dt} = 5 [e^{-t} (-\sin t) + \cos t (-e^{-t})] \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\text{वेग } v = -5 [-e^{-t} \cdot \sin t - e^{-t} \cdot \cos t]$$

$$= -5e^{-t} (\sin t + \cos t) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\text{त्वरण } a = \frac{dv}{dt} = -5[e^{-t}(\cos t - \sin t) + (\sin t + \cos t)(-e^{-t})]$$

$$= -5e^{-t} [\cos t - \sin t - \sin t - \cos t]$$

$$= -5e^{-t} (-2 \sin t) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\text{त्वरण } a = 10e^{-t} \cdot \sin t$$

अब

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ पर कण का वेग}$$

$$v = -5 e^{-\pi/2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= -5 e^{-\pi/2} (1 + 0)$$

$$= -5 e^{-\pi/2} \text{ इकाई}$$

और त्वरण

$$a = 10 e^{-\pi/2} \sin \pi/2$$

$$= 10 e^{-\pi/2} \times 1$$

$$= 10 e^{-\pi/2} \text{ इकाई} \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर-

दिया है-

$$s = 490 t - 4.9 t^2 \quad \dots(1)$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर-

$$\text{वेग } v = \frac{ds}{dt} = 490 t - 9.8 t \quad \dots(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

अधिकतम ऊँचाई पर वेग शून्य होता है।

$$\text{अतः} \quad 490 - 9.8 t = 0$$

$$t = \frac{490}{9.8} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$t = 50 \text{ सेकण्ड}$$

अधिकतम ऊँचाई

$$s = 490 \times 50 - 4.9 (50)^2 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= 24500 - 12250$$

$$= 12250 \text{ मीटर} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर-7 सह-संबंध गुणांक-

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x) \times \text{var}(y)}} \text{ से} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$r(x, y) = \frac{-2.25}{\sqrt{6.25 \times 20.25}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{-2.25}{\sqrt{126.5625}}$$

$$= \frac{-2.25}{11.25} \quad (2 \text{ अंक})$$

$$= -0.2 \quad \text{उत्तर}$$

अथवा का उत्तर-

हम जानते हैं कि-

$$\sigma_{x-y}^2 = \frac{1}{x} \Sigma [x - y - (\bar{x} - \bar{y})]^2 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{1}{x} \Sigma [x - \bar{x} - (y - \bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{x} \Sigma [x - \bar{x}]^2 - (y - \bar{y}) - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y})$$

(1 अंक)

$$= \frac{1}{x} \Sigma (x - \bar{x})^2 + \frac{1}{x} \Sigma (y - \bar{y})^2$$

$$- 2 \frac{1}{x} \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 r \sigma_x \sigma_y$$

$$\therefore r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y}$$

$$\Rightarrow 2 r \sigma_x \sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{(x-y)}^2 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{(x-y)}^2}{2 \sigma_x \sigma_y}$$

उत्तर-8. समाश्रयण रेखा-

$$2x - 9y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 9y = 2x + 6$$

$$y = \frac{2}{9} x + \frac{6}{9}$$

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{2}{3} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$b_{yx} = \frac{2}{9} \text{ (y की x पर समाश्रयण रेखा)}$$

पुनः

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$x = 2y - 1$$

$$b_{xy} = 2 \text{ (x की y पर समाश्रयण रेखा)} \quad (1 \text{ अंक})$$

तो

$$r_{xy} = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9} \times 2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(1 अंक)

$$b_{yx} = \frac{2}{9}$$

$$r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sigma_y}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_y = \frac{2}{9} \times \frac{9}{2}$$

$$= 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \sigma_x^2 = 9 \\ \because \sigma_x = 3 \end{array} \right]$$

(1 अंक)

अथवा का उत्तर—

माना ग्वालियर में वस्तु के मूल्य को x तथा भोपाल में y से दर्शाया जाता है तो प्रश्नानुसार—

$$\bar{x} = 70$$

$$\bar{y} = 75$$

$$\sigma_x = 2.5$$

$$\sigma_y = 3.0$$

$$r = 0.8$$

(1 अंक)

y की x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$y - 75 = 0.8 \frac{3.0}{2.5}(x - 70) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$y = \frac{2.4}{2.5} (x - 70) + 75$$

$$y = \frac{24}{25} (100 - 70) + 75 \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{24 \times 30}{25} + 75$$

$$= \frac{144}{5} + 75 \quad \because [\text{दिया है } x = 100]$$

$$= 28.8 + 75$$

$$= 103.80 \text{ रु.} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर-9. दिए गए समतल का समीकरण

$$x - 2y + 2z = 3 \quad \dots\dots(1)$$

इसके समान्तर समतल का समीकरण

$$x - 2y + 2z + k = 0 \quad \dots\dots(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

बिन्दु (1, 2, 3) से समतल पर डाले गए लम्ब की लम्बाई 1 है अतः

$$1 = \frac{1 \times 1 + (-2)(2) + 2 \times 3 + k}{\sqrt{1^2 + (2)^2 + (2)^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$1 = \frac{1 - 4 + 6 + k}{\sqrt{9}}$$

$$1 = \pm \frac{3+k}{3}$$

$$3 + k = \pm 3$$

$$k = \pm 3 - 3$$

$$k = 0 \text{ या } -6 \quad (1 \text{ अंक})$$

$k = 0$ रखने पर समतल का समीकरण

$$x - 2y + 2z = 0$$

तथा $k = -6$ रखने पर

$$x - 2y + 2z - 6 = 0 \quad (1 \text{ अंक})$$

अथवा का उत्तर- दिए गए समतलों के समीकरण

$$2x - 2y + z + 3 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

तथा

$$4x - 4y + 2z + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + z + \frac{5}{2} = 0 \quad \dots\dots(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

दो समांतर समतल के बीच की दूरी

$$d = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$d = \frac{3 - \frac{5}{2}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\frac{1}{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \quad (2 \text{ अंक})$$

उत्तर—10

दिया है

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) \\ &= [2 \times 3 + (-1) \times (-4) + (-1) \times (-4)] \\ &= 6 + 4 - 4 \end{aligned}$$

$$= 6 \left[\begin{array}{l} \because \hat{i}^2 + \hat{j}^2 + \hat{k}^2 = 1 \\ \hat{i} \pm \hat{j} \hat{k} = \hat{k} \hat{i} = 0 \end{array} \right] \quad (1 \text{ अंक})$$

यदि इनके बीच का कोण θ है तो—

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \dots(1) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (1)^2} \quad (1 \text{ अंक}) \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$

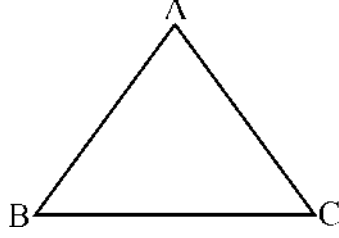
$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{3+16+16} \quad (1 \text{ अंक}) \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

समीकरण (1) में रखने पर

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{41}} \quad (1 \text{ अंक}) \\ &= \sqrt{\frac{6}{41}} \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{6}{41}}$$

प्रश्न-10 का अथवा का उत्तर-
दिया- ΔABC में?



$$\overrightarrow{BC} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 25} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = 5\sqrt{2} \quad \text{.....(1) (1 अंक)}$$

दिया है-

$$\overrightarrow{CA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 25} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{.....(2) (1 अंक)}$$

दिया है-

$$\overrightarrow{BA} = 7\hat{i} + \hat{j}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}| &= \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{.....(3) (1 अंक)}$$

त्रिभुज की परिमाप

$$\begin{aligned} &= |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| \\ &= 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(2 \text{ अंक})$$

उत्तर-11

दिया है-

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x^2+1} \\ x &= 1 \text{ पर} \end{aligned}$$

$$f(1) = \frac{1+1}{1+1}$$

(i) $f(1) = 1$ (1 अंक)

(ii) $f(1+0) = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)+1}{(1+h)^2+1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h}{2+2h+h^2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$
 (1 अंक)

(iii) $f(1-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)+1}{(1-h)^2+1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h}{2-2h+h^2}$$
 (1 अंक)
$$= \frac{2}{2}$$

$\therefore f(1-0) = 1$

$\therefore f(1) = f(1+0) = f(1-0)$ (2 अंक)

अतः दिया गया फलन $x = 1$ पर सांतत्य है।

प्रश्न-11 का अथवा का उत्तर-

दिया गया फलन $x \rightarrow \infty$ के लिए $\frac{\infty}{\infty}$ का रूप धारण कर लेता है तथा अंश व हर को x^2 से भाग देने पर-

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x-2)}{(x+8)(x-1)}$$
 (1 अंक)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{x}\right) \left(4 - \frac{2}{x}\right)}{\left(1 + \frac{8}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$
 (2 अंक)

$$= \frac{(3)(4)}{(1)(1)}$$

$$= 12$$
 (1 अंक)

उत्तर-12 दी गई रेखा

दिया गया वक्र $y = x$ (1)
 $y^2 = 16x$ (2)

समीकरण (2) में $y = x$ रखने पर

$$y^2 = 16y$$

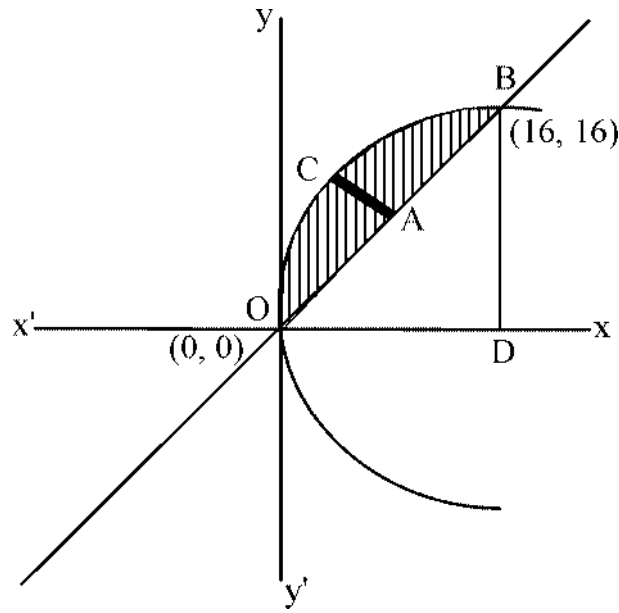
$$y^2 - 16 = 0$$

$$y(y - 16) = 0$$

तब $y = 0$ या $y = 16$
 $x = 0$ तो $y = 0$
 $x = 16$ तो $y = 16$

अतः रेखा व वक्र को प्रतिच्छेद बिन्दु

O (0, 0) व B (16, 16) होंगे



(2 अंक)

अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{16} (y_1 - y_2) dx \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x) dx$$

$$= 4 \int_0^{16} \sqrt{x} dx - \int_0^{16} x dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^{16} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{16}$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} [16^{3/2} - 0] - \frac{1}{2} [16^2 - 0] \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{8}{3} \times 64 - \frac{1}{2} \times 256$$

$$= \frac{512}{3} - 128$$

$$= \frac{512 - 384}{3}$$

(1 अंक)

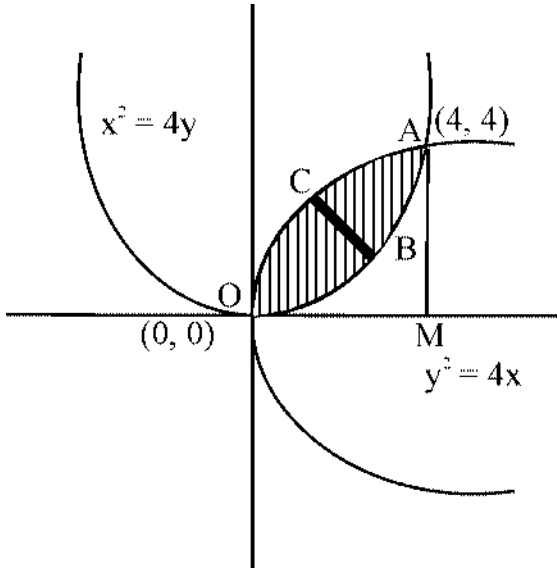
$$= \frac{128}{3}$$

अथवा का उत्तर—

दिए गए परवलय का समीकरण है—

$$y^2 = 4x \quad \dots\dots(1)$$

$$x^2 = 4y \quad \dots\dots(2)$$



(1 अंक)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर—

$$y^2 = 4(\sqrt{4y}) \quad (1 \text{ अंक})$$

$$y^2 = 8\sqrt{y}$$

$$y^4 = 64y$$

$$y^4 - 64y = 0$$

$$y(y^3 - 64) = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 4$$

यदि

$$y = 0 \quad x = 0$$

$$y = 4 \quad x = 4$$

रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

(1 अंक)

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_0^4 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{4x} - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx$$

(24)

I

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x^2 \, dx \\
&= 2 \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\
&= 2 \times \frac{2}{3} [(4)^{3/2} - 0] - \frac{1}{4 \times 3} [4^3 - 0] \\
&= \frac{4}{3} \times 8 - \frac{1}{12} \times 64 \\
&= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} \\
&= \frac{16}{3} [2 - 1] \\
&= \frac{16}{3} \text{ वर्ग इकाई} \quad (2 \text{ अंक}) \\
\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \frac{16}{3} \text{ वर्ग इकाई}
\end{aligned}$$

उत्तर-13

$$I = \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x}$$

$$I = \int \frac{dx}{5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) - 4 \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$\cos^2 x/2$ से भाग देने पर

$$I = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{5 \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) - 4 \tan \frac{x}{2}}$$

$$I = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{5 \tan^2 \frac{x}{2} - 4 \tan \frac{x}{2} + 5} \quad (2 \text{ अंक})$$

$\tan \frac{x}{2} = t$ रखने पर

$$\sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = dt$$

$$\sec^2 \frac{x}{2} dx = 2 dt$$

$$= \int \frac{2dt}{5t^2 - 8t + 5}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{8}{5}t + 1}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}t + 1}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{16}{25}\right) + 1}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad (2 \text{ अंक})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \tan^{-1} \frac{t - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\because \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{5t - 4}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{5 \tan \frac{\pi}{2} - 4}{3} \quad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न.13 का अथवा का उत्तर—

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad \dots\dots(1)$$

(26)

I

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad \dots\dots(2) \quad (2 \text{ अंक})$$

(1) और (2) जोड़ने पर—

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} dx$$

$$2I = [\pi]_0^{\pi/2} \quad (2 \text{ अंक})$$

$$2I = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर—14

दिया गया समीकरण है— $y = x^3 + ax^2 + bx + c$
 x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b \quad (1 \text{ अंक})$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर—

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2a \quad (2 \text{ अंक})$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6 \quad (2 \text{ अंक})$$

प्रश्न—14 का अथवा का उत्तर—

दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = e^x$

यह y के एक रैखिक अवकलन समीकरण है. अतः इसकी तुलना व्यापक समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \text{से करने पर} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$P = 1, \quad Q = e^x$$

समाकलन गुणांक

$$\begin{aligned} \text{I.F.} &= e^{\int P dx} \\ &= e^{\int P dx} \\ &= e^x \end{aligned} \quad (2 \text{ अंक})$$

अतः

$$y (\text{I.F.}) = \int Q (\text{I.F.}) dx + c$$

$$y e^x = \int e^x \cdot e^x dx + c$$

$$y e^x = \int e^{2x} dx + c$$

$$y e^x = \frac{e^{2x}}{2} + c \quad (1 \text{ अंक})$$

$$y = \frac{1}{2} e^x + c e^{-x} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर—15

लीप वर्ष में कुल दिनों की संख्या 366 होती है अर्थात् रविवार सहित 52 पूर्ण सप्ताह तक 2 दिन अतिरिक्त होंगे। ये निम्नलिखित हो सकते हैं— (1 अंक)

- (1) सोमवार, मंगलवार
- (2) मंगलवार, बुधवार
- (3) बुधवार, गुरुवार
- (4) गुरुवार, शुक्रवार
- (5) शुक्रवार, शनिवार
- (6) शनिवार, रविवार
- (7) रविवार, सोमवार (2 अंक)

इन सभी समसम्भावी स्थितियों में से अंतिम दो स्थितियाँ रविवार होने के अनुकूल हैं, अतः —

$$\text{अभिष्ट प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{कुल संभावित स्थितियों की संख्या}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$\text{पुनः प्रायिकता} = \frac{2}{7} \quad (1 \text{ अंक})$$

प्रश्न—15 का अथवा का उत्तर—

दोनों पत्तों के लाल होने की प्रायिकता

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{26C_2}{52C_2} \\ &= \frac{26 \times 25}{52 \times 51} \\ &= \frac{2 \times 1}{2 \times 1} \end{aligned} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{13 \times 25}{26 \times 51} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= \frac{325}{1326}$$

दोनों पत्तों के इक्का होने की प्रायिकता –

$$P(B) = \frac{4C_2}{52C_2}$$

$$= \frac{4 \times 3}{52 \times 51}$$

$$= \frac{2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6}{1326} \quad (1 \text{ अंक})$$

इसी प्रकार दो लाल इक्के होने की प्रायिकता –

$$P(A \cap B) = \frac{1}{1326}$$

∴ अभीष्ट प्रायिकता $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1 अंक)

$$= \frac{325}{1326} + \frac{6}{1326} - \frac{1}{1326}$$

$$= \frac{330}{1326}$$

$$= \frac{55}{221} \quad (1 \text{ अंक})$$

उत्तर-16

दी गई सरल रेखाएँ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \dots\dots(1)$$

और $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5} \quad \dots\dots(2)$

तब न्यूनतम दूरी

$$SD = \frac{\begin{vmatrix} \alpha - \alpha_1 & \beta - \beta_1 & \gamma - \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$SD = \frac{\begin{vmatrix} 2-1 & 4-2 & 5-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{(3 \times 5 - 4 \times 4)^2 + (2 \times 5 - 3 \times 4)^2 + (2 \times 4 - 3 \times 3)^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$SD = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$SD = \frac{[1(15-16) - 2(10-12) + 2(8-9)]}{\sqrt{6}} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$SD = \frac{-1+4-2}{\sqrt{6}}$$

$$SD = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (2 \text{ अंक})$$

प्रश्न-16 का का अथवा का उत्तर-

माना गोले का समीकरण-

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \dots\dots(1)$$

बिन्दु $(1, -3, 4)$, $(1, 5, 2)$ और $(1, -3, 0)$ इस पर स्थित है।

अतः $1+9+16+2u-6v+8w+d = 0$

या $26+2u-6v+8w+d = 0 \quad \dots\dots(2)$

$1+25+4+2u-10v+4w+d = 0$

या $30 + 2u - 10v + 4w + d = 0 \quad \dots\dots(3)$

$1+9+0+2u-6v+0+d = 0$

या $10 + 2u - 6v + d = 0 \quad \dots\dots(4) \quad (1 \text{ अंक})$

समीकरण (2) में से समीकरण (3) को घटाने पर-

$4v + 4w - 4 = 0$

या $v + w - 1 = 0 \quad \dots\dots(5) \quad (1 \text{ अंक})$

समीकरण (2) में से समीकरण (4) घटाने पर

$8w + 16 = 0$

या $w = -2 \quad (6) \quad (1 \text{ अंक})$

समीकरण (5) में रखने पर-

$v - 2 - 1 = 0$

या $v = 3 \quad \dots\dots(7) \quad (1 \text{ अंक})$

गोले का केन्द्र $(-u, -v, -w)$ समतल $x + y + z = 0$ पर स्थित है, इसलिए

$-u - v - w = 0$

$u + v + w = 0 \quad \dots\dots(8)$

$v = 3$ और $w = -2$ रखने पर

$$u + 3 - 2 = 0$$

$$u = -1$$

(1 अंक)

समीकरण (4) में u व v के मान रखने पर

$$-2 - 18 + d + 10 = 0$$

या

$$d = 10$$

समीकरण (1) में u, v, w, d के मान रखने पर गोले का समीकरण—

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 4z + 10 = 0$$

(1 अंक)

उत्तर— 17

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= [\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{b} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{a}] \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}] \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}] \quad (1 \text{ अंक}) \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a}] \\
 &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (1 \text{ अंक}) \\
 &= [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] - [\vec{a} \cdot \vec{a} \vec{b}] + [\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}] + [\vec{b} \vec{b} \vec{c}] \\
 &\quad - [\vec{b} \vec{a} \vec{b}] + [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] \quad (1 \text{ अंक}) \\
 &= [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] - 0 + 0 + 0 - 0 + [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] \\
 &\quad (1 \text{ अंक}) \\
 &= [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] + [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \quad (1 \text{ अंक}) \\
 &= 2 [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]
 \end{aligned}$$

अथवा का उत्तर—

सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में मानक सदिश

$$= \frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

(1 अंक)

∴ दिया हुआ सदिश बल

$$\vec{F} = 15 \left[\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} \right]$$

$$= 5 (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \quad (1 \text{ अंक})$$

माना सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ क्रमशः बिन्दु O व P को निरूपित करते हैं। तब—

$$\begin{aligned} \overline{OP} = \vec{r} &= (2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \\ &= \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} \end{aligned} \quad (1 \text{ अंक})$$

∴ बल \vec{F} का बिन्दु O के परितः आघूर्ण

$$= \vec{r} \times \vec{F} \quad (1 \text{ अंक})$$

$$= (\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 5 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 (-4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad (2 \text{ अंक})$$