# हायर सेकण्डरी स्कूल परीक्षा– 2012–13

**HIGHER SECONDARY SCHOOL EXAMINATION**

**प्रादर्श प्रश्न–पत्र**

Model Question Paper

## उच्च गणित

HIGHER MATHEMATICS

(Hindi and English Versions)

Time– 3 घंटे | Maximum Marks–100

**निर्देश–**

(1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
(2) प्रश्नों पर आधारित अंक उनके सम्मुख दर्शाए गए हैं।
(3) प्रश्न पत्र में दो खण्ड अ एवं ब दिए गए हैं।
(4) खण्ड अ में दिए गए प्रश्न क्र. 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं।
(5) खण्ड ब में प्रश्न क्र. 6 से 21 में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।

Instructions

(1) All questions are compulsory to solve.
(2) Marks have been indicated against each question
(3) There are two sections 'A' and 'B' are given in the question paper.
(4) In section A question No. 1 to 5 are of objective type questions.
(5) Internal options are given in question No. 6 to 21 of Section-B

**खण्ड–अ वस्तुनिष्ठ प्रश्न** (Objective Type Questions)

**प्रश्न–1 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–**
(5 × 1 अंक)

(i) $\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$ के आंशिक भिन्न होगी–

(a) $\dfrac{1}{2(x+4)} - \dfrac{1}{2(x+6)}$ (b) $-\dfrac{1}{5(x+4)} - \dfrac{1}{2(x+6)}$

(c) $\dfrac{1}{3(x+4)} + \dfrac{5}{2(x+6)}$ (d) $\dfrac{2}{x+4} - \dfrac{1}{x+6}$

(ii) $2\tan^{-1}x$ का मान है–

(a) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ (b) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(d) $\tan^{-1}\dfrac{1+x^2}{2x}$ (d) $\tan^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x}$

(iii) बिन्दु (2, 1, 4) की y अक्ष से दूरी होगी–

(a) $\sqrt{20}$ (b) 1

(c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{10}$

(iv) समतल $2x - y + 2z + 1 = 0$ की मूल बिन्दु से दूरी होगी–

(a) 1 (b) $\frac{1}{3}$

(c) 3 (d) $\sqrt{3}$

(v) $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{i}-9\hat{j}-4\hat{k}$ और $6\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}$ है। $|\overrightarrow{AB}|$ का परिणाम है–

(a) 11 (b) 12

(c) 13 (d) 14

Choose and Write the correct answer from the given options provided in every objective type question

(i) Partial fraction of $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ is–

(a) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$ (b) $-\frac{1}{5(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$

(c) $\frac{1}{3(x+4)} + \frac{5}{2(x+6)}$ (d) $\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+6}$

(ii) The value of $2\tan^{-1} x$ is –

(a) $\tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (b) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(d) $\tan^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ (d) $\tan^{-1}\frac{1-x^2}{2x}$

(iii) Distance of the points (2, 1, 4) from y axis is–

(a) $\sqrt{20}$ (b) 1

(c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{10}$

(iv) Distance from origin to plance $2x - y + 2z + 1 = 0$ is–

(a) 1 (b) $\frac{1}{3}$

(c) 3 (d) $\sqrt{3}$

(v) The position vactors of vactor $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are $2\hat{i}-9\hat{j}-4\hat{k}$ and $6\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}$ respectively then the magnitude of $|\overrightarrow{AB}|$ is–

(a) 11 (b) 12

(c) 13 (d) 14

**प्रश्न–2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथन छाँटकर अपनी उत्तरपुस्तिका में लिखिए।** (5 × 1 अंक)

(i) $\int \frac{\log x}{x} dx$ का मान $\frac{1}{2}$ $(\log\ x)^2 + c$ है।

(ii) गोले का $\left|\hat{r} - (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})\right| = 5$ केन्द्र $(2, -1, 1)$ है।

(iii) सह–संबंध r तथा समाश्रयण गुणाकों $b_{xy}$ तथा $b_{yx}$ में संबंध $r = b_{xy} , b_{yx}$ होता है।

(iv) त्रिभुज की तीनों मध्यिकाओं द्वारा निर्धारित सदिशों का योग शून्य होता है।

(v) दो चरों के मध्य सह–संबंध गुणांक सदैव $r \leq 1$ सन्तुष्ट करता है।

Write True / False in the following statements

(i) The value of $\int \frac{\log x}{x} dx$ is $\frac{1}{2}$ $(\log\ x)^2 + c$

(ii) The centre of the sphere $\left|\hat{r} - (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})\right| = 5$ is $(2, -1, 1)$

(iii) The relation between correlation cofficient r and the regretion coefficient bxy and byx is r = bxy . byx

(iv) The vector's sum of the median of triangle directed from the vertex is zero.

(v) The co-relation cofficient of two variables always satisfied the relation $r \leq 1$.

**प्रश्न–3. सही जोड़ी बनाइए।** (5 × 1 अंक)

| खण्ड–अ | | खण्ड–ब | |
|---|---|---|---|
| (i) | $\int \frac{dx}{\tan x + \cot x}$ | (a) | $3 \sin^2 x \cos x$ |
| (ii) | $\frac{d}{dx}(\tan\ x)$ | (b) | $\cot^2 x$ |
| (iii) | यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{a} . \vec{b}$ का मान | (c) | $\frac{17}{7}$ |
| (iv) | 0.4396E05 + 0.3512E02 का मान | (d) | $-\frac{\cos 2x}{4}$ |
| (v) | मूल बिन्दु से समतल $3x - 2y + 6z = 17$ की दूरी | (e) | 0.1251E08 |
| | | (f) | 0 |
| | | (g) | $\sec^2 x$ |

Make the correct pairs

| Section-A | | Section-B | |
|---|---|---|---|
| (i) | $\int \frac{dx}{\tan x + \cot x}$ | (a) | $3 \sin^2 x \cos x$ |
| (ii) | $\frac{d}{dx}(\tan x)$ | (b) | $\cot^2 x$ |
| (iii) | If $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ then value of $\vec{a} . \vec{b}$ | (c) | $\frac{17}{7}$ |
| (iv) | Value of 0.4396E05 + 0.3512E02 | (d) | $-\frac{\cos 2x}{4}$ |
| (v) | The length of perpendicular from the origin to the plane $3x - 2y + 6z = 17$ | (e) | 0.1251E08 |
| | | (f) | 0 |
| | | (g) | $\sec^2 x$ |

**प्रश्न–4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–** (5 × 1 अंक)

(i) कोई फलन f (x) बिन्दु x, पर उच्चिष्ठ है तो f"(x) का मान ............... होगा।

(ii) न्यूटन रेफसन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् ...................... होगा।

(iii) यदि $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$ , $e^2 = 7.39$ तो समलम्ब चतुर्भुज नियम से $\int_0^3 e^x dx$ .................... ।

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ का मान ....................... है।

(v) बिन्दु $\vec{a}$ से हो कर जाने वाले तथा $\vec{x}$ पर लम्बवत् समतल का समीकरण .. ............. है।

Fill in the Blanks—

(i) If any function f (x) is maxima at x, then value of f"(x) is ....................

(ii) Cube root of 10 by Nuwtion Raphson's method after first interaction is ...........................

(iii) If $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$ , $e^2 = 7.39$ then by trapezoidal rule integral $\int_0^3 e^x dx$ ....................

(iv) The value $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ is.......................

(v) Equation of the plance passing through the point $\vec{a}$ and normal to $\vec{x}$ is .........................

**प्रश्न–5. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में लिखिए–** (5×1 अंक)

(i) सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए।

(ii) yz–समतल का समीकरण लिखिए।

(iii) $\int \sec x \, dx$ का मान क्या होगा।

(iv) $a^x$ का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक लिखिए।

(v) 0.65731E05 + 0.58918E05 = .........................

Write the answer of each question in one word / sentence of the following—

(i) Write the fomula of Simpsons' one third ruly.

(ii) What is the equation of yz–plane

(iii) What is the value of $\int \sec x \, dx$

(iv) Write differential cofficient of $a^x$ with rest to x

(v) 0.65731E05 + 0.58918E05 = .........................

**खण्ड–ब** (Section-B)

**अतिलघु उत्तरीय प्रश्न** (Very Short Answer Type Questions)

**प्रश्न–6. भिन्न** $\frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ **को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए।** (4 अंक)

Resolve $\frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ into partial fraction

अथवा (or)

भिन्न $\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए।

Resove $\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ into partial fraction

**प्रश्न–7. सिद्ध कीजिए कि–** (4 अंक)

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

Prove that—

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

**अथवा (or)**

**सिद्ध कीजिए–**

$$\sin^{-1}\sqrt{x} + \sin^{-1}\sqrt{x-1} = \frac{\pi}{2}$$

Prove that—

$$\sin^{-1}\sqrt{x} + \sin^{-1}\sqrt{x-1} = \frac{\pi}{2}$$

**प्रश्न–8.** यदि $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

(4 अंक)

If $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ then prove that $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

**अथवा** (or)

यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ........\infty}}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि–

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ........\infty}}}$, then prove that

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

**प्रश्न–9.** $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ का अकवल गुणांक ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

Find the differential coefficient of $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

**अथवा (or)**

यदि $y = \log\sqrt{\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $y = \log\sqrt{\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$

**प्रश्न–10.** एक वृत्तीय प्लेट की त्रिज्या 0.2 सेमी प्रति सेकेण्ड की दर से बढ़ रही है। जब त्रिज्या 10 सेमी हो तो प्लेट के क्षेत्रफल परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

The radious of a ciruclar plat is increasing at the rate of 0.2 cm per second. At what rate is the area increasing, when the radius of plate is 10 cm.

**अथवा (or)**

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ की अन्तराल [1, 3] में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए।

Verify Rolle's threorem for the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in the interval [1, 3]

**प्रश्न–11.** निम्नलिखित आँकड़ों से x तथा y के मध्य सह–संबंध गुणांक की गणना कीजिए। (4 अंक)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| y | 12 | 20 | 25 | 33 | 35 |

Calculate the coefficient of corelation between x and y on the basis of the following data when x and y are

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| y | 12 | 20 | 25 | 33 | 35 |

**अथवा (or)**

यदि cov (x, y) = –2.25 , var (x) = 6.25 , var (y) = 20.25 हो, तो सह–संबंध गुणांक $\rho$ (x, y) ज्ञात कीजिए तथा सह–संबंधी की प्रकृति भी बताइए।

If cov (x, y) = –2.25 , var (x) = 6.25 , var (y) = 20.25 then find the coefficient of correlation $\rho$ (x, y) and also discribe the nature of correlation.

**प्रश्न–12.** यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण $\theta$ है, समाश्रयण गुणांक byx = 1.6 तथा bxy = 0.4 तो tan $\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

If the angle between two regression lines of $\theta$, regression coefficient byx = 1.6 and bxy = 0.4, then calculate the value of tan $\theta$

**अथवा (or)**

दो चर राशियों x और y के मध्य सह–संबंध गुणांक $\rho$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$\rho = \dfrac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - \sigma^2_{(x-y)}}{2\sigma_x\sigma_y}$ जहाँ $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ तथा $\sigma^2_{(x-y)}$ क्रमशः x , y और (x – y) के प्रसारण गुणांक हैं।

If the correlation coefficient between two variables x and y is $\rho$, then show that $\rho = \dfrac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - \sigma^2_{(x-y)}}{2\sigma_x\sigma_y}$ where $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ and $\sigma^2_{(x-y)}$ the variance of x , y and (x – y) respectively.

## लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

**प्रश्न–13.** 52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 यादृच्छया निकाले जाते हैं, दोनों लाल या दोनों इक्के होने की क्या प्रायिकता है? (5 अंक)

Two cards are drawn at rendom from a well shuffled pack of 52 cards, what is the probability that either both are red or both are aces?

**अथवा (or)**

दो पासों की एक फेंक में योग 9 या 11 प्राप्त न करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। In the single through of two dice what is the probability of not obtaining a total of 9 and 11.

**प्रश्न–14.** बिन्दु (–1, 3, 2) से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $x + 2y + 2z = 5$ तथा $3x + 3y + 2z = 8$ पर लम्बा है। (5 अंक)

Find the equation of the plance which passes through the point (1, 3, 2) and prependicular to the planes $x + 2y - 3z = 5$ and $3x + 3y + 2z = 8$

**अथवा (or)**

एक चर समतल मूल बिन्दु से P दूरी पर रहता है तथा अक्षों को A, B और C बिन्दुओं पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दु पथ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{16}{p^2}$ है

A variable plane is at a constant distance P from a origin and meet the axis at points A, B and C. Show that the locus of the centroid of tetrahodron OABC is $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{16}{p^2}$

**प्रश्न–15.** सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि– $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (5 अंक)

Prove by vector method– $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए कि–

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$$

Prove that—

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$$

**प्रश्न–16.** यदि $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $f\left(\frac{1}{x}\right) = -(f)\,x$ (5 अंक)

If $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, then prove that $f\left(\frac{1}{x}\right) = -(f)\,x$

**अथवा (or)**

निम्नलिखित फलन की $x = 0$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिए–

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

Discss the continuity of the following at $x = 0$ —

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

**प्रश्न—17.** निम्न का मान ज्ञात कीजिए– (5 अंक)

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Evaluate the following–

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

**अथवा (or)**

सिद्ध कीजिए— $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that— $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$

**प्रश्न—18.** वक्र $x^2 = 4y$ तथा रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area bounded by the curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$.

(5 अंक)

**अथवा (or)**

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$$

Evaluate the following—

**प्रश्न—19.** निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए– (5 अंक)

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y$$

Solve the following differential equation—

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y$$

अथवा (or)

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए–

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

Solve the following differential equation—

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

**प्रश्न–20.** उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्–कोज्याएँ निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निर्धारित हैं– (6 अंक)

$$2l + 2n - m = 0 \text{ एवं } ml + mn + nl = 0$$

Find the angle between those lines, where direction cosines are recognised by the following equation–

$$2l + 2n - m = 0 \text{ and } ml + mn + nl = 0$$

**अथवा (or)**

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ तथा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$ समतलीय हैं। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Prove that the lines $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ and $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$ are coplaner. Also find the point of intersection of these lines

**प्रश्न–21.** उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जिनकी सदिश समीकरण है– (6 अंक)

$$\bar{r} = (1+2\lambda)\,\hat{i} + (2+3\lambda)\,\hat{j} + (3+4\lambda)\,\hat{k}$$

$$\bar{r} = (2+3\mu)\,\hat{i} + (3+4\mu)\,\hat{j} + (4+5\mu)\,\hat{k}$$

Find the shortest distance between the two lines, whose vector equations are—

$$\bar{r} = (1+2\lambda)\,\hat{i} + (2+3\lambda)\,\hat{j} + (3+4\lambda)\,\hat{k}$$

$$\bar{r} = (2+3\mu)\,\hat{i} + (3+4\mu)\,\hat{j} + (4+5\mu)\,\hat{k}$$

**अथवा (or)**

उस गोले का समीारण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, –2, –4) तथा (2, –1, –1) से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र रेखा $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ पर स्थित है।

Find the equation of the sphere which posses through points (0, –2, –4) and (2, –1, –1) and $5y + 2z = 0 = 2x - y$.

# आदर्श उत्तर (Model Answer)

## खण्ड–अ

**उत्तर–1**

(i) (a) (ii) (b)
(iii) (a) (iv) (b)
(v) (d)

**उत्तर–2**

(i) सत्य (ii) असत्य
(iii) असत्य (iv) सत्य
(v) असत्य

**उत्तर–3.**

(i) (d) (ii) (g)
(iii) (f) (iv) (e)
(v) (c)

**उत्तर–4.**

(i) ऋणात्मक (ii) 2.1667

(iii) 6.915 (iv) $\log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right] + c$

(v) $(\bar{r}-\bar{a})\,\hat{n}=0$

**उत्तर–5.**

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[y_o + y_n + 4\,(y_1 + y_3 \,......... \, y_{n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 \,.......\, y_{n-2})]$

(ii) $x = 0$ (iii) $\log(\sec x + \tan x)$

(iv) $a^x \log_e a$

(v) 0.124649E06

## खण्ड–ब (Section-B)

**उत्तर–6.**

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$ (1 अंक)

$$2x - 3 = A\,(x^2+1) + (Bx + c)\,(x-1)\,(x^2+1) + (Dx+E)\,(x-1)$$

$x = 1 \quad \Rightarrow -1 = 4A \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$ (1 अंक)

अब $2x - 3 = A\,(x^4 + 2x^3 + 1) + (Bx + C)\,(x^3 - x^2 + x - 1)$
$+ D\,(x^2 - x) + E\,(x-1)$

$2x - 3 = A\,(x^4 + 2x^3 + 1) + B\,(x^4 - x^3 + x^2 - x) + C\,(x^3 - x^2 + x - 1)$
$+ D\,(x^2 - x) + E\,(x-1)$

सजातीय पदों की तुलना करने पर–

$$0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4}$$

$$0 = -B + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}$$

$$0 = 2A + B - C + D$$

$$= -\frac{2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} + D \quad \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$2 = -B + C + D + E$$

$$2 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} + E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{5}{2}$$ (1 अंक)

समीकरण (1) से

$$\therefore \quad \frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x-1)}+\frac{(x-1)}{4(x^2+1)}+\frac{(x+5)}{2(x^2+1)^2}$$ (1 अंक)

**प्रश्न–6 का अथवा का उत्तर–**

$$\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8} = 1 + \frac{5x+8}{x^2+2x-8} \quad \text{......(i)}$$

माना

$$\frac{5x+8}{x^2+2x-8} = \frac{5x+8}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{(x+4)}+\frac{B}{(x-2)} \quad \text{.......(ii)}$$ (1 अंक)

$$5x + 8 = A(x - 2) + B(x + 4)$$

x के गुणांकों की तुलना करने पर $5 = A + B$ ........(iii) (1 अंक)

अचर पदों की तुलना करने पर $8 = -2A + 4B$ ...........(iv)

(iii) व (iv) को हल करने पर $A = 2$ , $B = 3$ (1 अंक)

अब समीकरण (i) से

$$\frac{5x+8}{x^2+2x-8} = \frac{2}{x+4}+\frac{3}{x-2}$$

समीकरण (ii) से

$$\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8} = 1 + \frac{2}{x+4}+\frac{3}{x-2}$$ (1 अंक)

**उत्तर–7**

बायाँ पक्ष लेने पर–

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$$

$$= \left(\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\frac{16}{65}$$

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right\} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$$

(1 अंक)

$$= \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\frac{16}{65}$$

$$= \sin^{-1}\frac{63}{65} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$$ (1 अंक)

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} + \frac{16}{65}\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}\right\}$$

(1 अंक)

$$= \left\{\frac{63}{65}\times\frac{63}{65} + \frac{16}{65}\times\frac{16}{65}\right\} = \sin^{-1}\left(\frac{4225}{4225}\right)$$

$= \sin^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{2}$ दायाँ पक्ष (1 अंक)

**प्रश्न–7 का अथवा का उत्तर–**

बायाँ पक्ष $\sin^{-1}\sqrt{x} + \sin^{-1}\sqrt{1-x}$

$\because$ $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x}$ (1 अंक)

$\because$ $\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{1-x}$

$\cos^{-1}\sqrt{1-x} + \sin^{-1}\sqrt{1-x}$ (1 अंक)

$= \dfrac{\pi}{2}$ = दायाँ पक्ष [$\because \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$]

(2 अंक)

**उत्तर–8**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right]$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

(1 अंक)

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

(1 अंक)

$$\frac{(e^{2x} + e^{-2x} - 2) - 2(e^{2x} + e^{-2x} + 2)}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$ (2 अंक)

**प्रश्न–8 का अथवा का उत्तर–**

$$y = \log \sqrt{\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{mx}{2}}{2\cos^2 \frac{mx}{2}}}$$

$$= \frac{d}{dx} \log \tan \frac{mx}{2}$$ (1 अंक)

$\tan \frac{mx}{2} = t$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log t$$

$$= \frac{d}{dt} . \log t \frac{dt}{dx}$$ (1 अंक)

$$= \frac{d}{dt} . \log t . \frac{d}{dx} . \tan \frac{mx}{2}$$

$$= \frac{1}{t} . \frac{m}{2} \sec^2 \frac{mx}{2}$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{mx}{2}} \times \frac{m}{2} . \sec^2 \frac{mx}{2}$$ (1 अंक)

$$= \frac{m}{2} \cdot \frac{\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{mx}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{mx}{2}}$$

$$= \frac{m}{2\sin\frac{mx}{2}.\cos\frac{mx}{2}} = \frac{m}{\sin mx}$$ (1 अंक)

$$\frac{dy}{dx} = m \text{ cosec } (mx)$$

**उत्तर–9**

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow y = \frac{(1-x)^{½}}{(1+x)^{½}}$$

log लेने पर $\log y = \log (1 - x)^{½} - \log (1 + x)^{½}$

$$\log y = \log \frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x)$$ (1 अंक)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)}(-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)} - 1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}\right]$$ (1 अंक)

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-x^2}$$ (1 अंक)

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$ यही सिद्ध करना था (1 अंक)

**प्रश्न–9 का अथवा का उत्तर–**

$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x}} .........\infty}$$

$$y = \sqrt{\sin x + y}$$ (1 अंक)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$$y^2 = \sin x + y$$ (1 अंक)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$2y \frac{dy}{dx} = \cos x \frac{dy}{dx}$$ (1 अंक)

$$(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$$ (1 अंक)

यही सिद्ध करना था।

**उत्तर–10**

क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

$\therefore$ $$\frac{dA}{dr} = 2 \pi r$$ (1 अंक)

त्रिज्या परिवर्तन की दर $= \frac{dr}{dt} = 2$ सेमी./सेकेण्ड

अब क्षेत्रफल की दर $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ (1 अंक)

$= 2 \pi r (0.2)$ (1 अंक)

$\because$ $r = 10$ सेमी

$\therefore$ क्षेत्रफल परिवर्तन की दर $= 2 \pi . 10 (0.2)$

$= 4 \pi$ सेमी$^2$/सेकण्ड (1 अंक)

**प्रश्न–10 का अथवा का उत्तर**

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

(i) f (x), अंतराल [1, 3] में सतत् है। (1 अंक)

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ जिसका अस्तित्व $x \in [1, 3]$ के सभी मानों के लिए है।

(1 अंक)

इसलिए f (x), अंतराल (1, 3) के लिए अवकलनीय है।

(iii) f (1) = 0 तथा f (3) = 0

$\therefore$ $f(1) = f(x)$

अतः रोले प्रमेय की सभी स्थितियाँ संतुष्ट होती हैं। (1 अंक)

अतः $c \in (1, 3)$ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि–

$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$$

$$c = \left(2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

c के दोनों मान अंतराल (1, 3) में स्थित है। (1 अंक)

अतः रोले प्रमेय सिद्ध हुई।

**उत्तर–11**

| x | y | u | v | $u^2$ | $v^2$ | u.v |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | –8 | –13 | 64 | 169 | 104 |
| 9 | 20 | –4 | –5 | 16 | 25 | 20 |
| 13 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 33 | 4 | 8 | 16 | 64 | 32 |
| 21 | 25 | 8 | 10 | 64 | 100 | 80 |
| 65 | 125 | $\Sigma u = 0$ | $\Sigma v=0$ | $\Sigma u^2=160$ | $\Sigma v^2=358$ | $\Sigma u.v=236$ |

(2 अंक)

$$\Sigma u = 0,\ \Sigma v = 0,\ \Sigma u^2 = 160,\ \Sigma v^2 = 358,\ \Sigma u\,.\,v = 236$$

सूत्र
$$\rho = \frac{n\Sigma u.v - \Sigma u.\Sigma v}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}}$$

$$= \frac{5\times 236 - 0\times 0}{\sqrt{[5\times 160 - 0][5\times 358 - 0]}}$$ (1 अंक)

$$= \frac{236}{\sqrt{160\times 358}} = \frac{236}{\sqrt{57280}}$$

$$= \frac{236}{239.33} = 0.98$$ (1 अंक)

**प्रश्न–11 का अथवा का उत्तर**

$$\text{cov}\ (x\ .\ y) = -2.25,\ \text{var}\ (x) = 6.25,\ \text{var}\ (y) = 20.25$$

$\therefore$ $$\rho\ (x, y) = \text{cov}\ (x, y)$$ (1 अंक)

$$\rho\ (x, y) = \frac{\text{cov}\,(x, b)}{\sqrt{\text{var}\,(x)\,.\,\text{var}\,(y)}}$$

$$= \frac{-2.25}{\sqrt{6.25\times 20.25}}$$ (1 अंक)

$$= \frac{-2.25}{2.5\times 4.5} = \frac{-225}{25\times 45}$$ (1 अंक)

$$= -0.2$$

चूँकि $\rho$ का मान ऋणात्मक है अतः सह–संबंध पूर्ण ऋणात्मक है। (1 अंक)

**उत्तर–12**

समाश्रयण गुणांक $b_{yx} = 1.6$ (1 अंक)

$$b_{xy} = 0.4$$

अतः दोनों रेखाओं की प्रवणता $m_1 = 1.6$ , $m_2 = 0.4$

बीच का कोण $\theta$ है।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1.6 - 0.4}{1 + 1.6 \times 0.4}$$ (2 अंक)

$$\tan\theta = \frac{1.2}{1.64} = 0.73$$

$$\tan\theta = 0.73$$ (1 अंक)

**प्रश्न—12 का अथवा का उत्तर—**

$$\sigma^2_{x-y} = \frac{1}{n}\Sigma[x - y) - (\bar{x} - \bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma[x - \bar{x}) - (y - \bar{y})]^2$$ (1 अंक)

$$= \frac{1}{n}\Sigma[x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y}) - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma[x - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\Sigma(y - \bar{y})^2 - \frac{2}{n}(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$$

(1 अंक)

$$\sigma^2_{x-y} = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y$$ (1 अंक)

$$2\rho\sigma_x\sigma_y = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - \sigma^2_{x-y}$$

या $$\rho = \frac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - \sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x\sigma_y}$$ (1 अंक)

## लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Question)

**उत्तर—13**

$$n(S) = 52_{C_2} = 1326$$

मान लो E = दोनों पत्ते लाल होने की घटना

F = दोनों पत्ते इक्के होने की घटना

तब $E \cap F$ = दो लाल इक्के होने की घटना (1 अंक)

$$n(E) = 26_{C_2} = 325$$

$$n(F) = 4_{C_2} = 6$$ (1 अंक)

तथा $$n(E \cap F) = {}^2C_2 = 1$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{325}{1326}$$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{6}{1325} = \frac{1}{221}$$

$$P(E \cap F) = \frac{n(E \cap F)}{n(S)} = \frac{1}{1326}$$ (1 अंक)

$\therefore$ P (दोनों लाल या इक्के होने पर)

$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$= \frac{325}{1326} + \frac{6}{1325} - \frac{1}{1326}$$ (1 अंक)

$$= \frac{330}{1326} = \frac{55}{221}$$ (1 अंक)

**प्रश्न–13 का अथवा का उत्तर–**

यहाँ $n(S) = 6 \times 6 = 36$

माना $A$ = दोनों पासों पर 9 आने की घटना

$= \{(4, 5), (5, 4), (3, 6), (6, 3)\}$ (1 अंक)

$B$ = दोनों पासों पर 11 आने की घटना

$= [(5, 6), (6, 5)]$

$\therefore$ $P(A) = \frac{4}{36}$ $P(B) = \frac{2}{36}$ (1 अंक)

चूँकि दोनों घटनाएँ अपवर्जी हैं।

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1 अंक)

$$= \frac{4}{36} + \frac{2}{6}$$

$$= \frac{6}{36} - \frac{1}{6}$$ (1 अंक)

परंतु योग 9 व 11 न आने की प्रायिकता

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$ (1 अंक)

**उत्तर–14**

बिन्दु (–1, 3, 2) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है–

$a(x+1) + b(y-3) + c(z-2) = 0$ ..........(1) (1 अंक)

यह दिए हुए समतलों पर लम्ब होगा–

$$a + 2b + 2c = 0$$

$$3a + 3b + 2c = 0 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\frac{a}{4-6} = \frac{b}{6-2} = \frac{c}{3-6}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a}{-2} = \frac{b}{4} = \frac{b}{4} = \frac{c}{-3} = k$$

$$a = 2k\ ,\ b = -4k\ ,\ c = 3k \qquad (1 \text{ अंक})$$

मान (1) में रखने पर–

$$2k\ (x+1) - 4k\ (y-3) + 3k\ (z-2) = 0 \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$2x - 4y + 3z + 8 = 0 \qquad (1 \text{ अंक})$$

**प्रश्न–14 का अथवा का उत्तर–**

माना समतल का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad .........(1)$$

केन्द्र से इसकी दूरी

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad .......(2) \quad (1 \text{ अंक})$$

A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (a, o, o), (0, b, 0) तथा (0, 0, c) है अतः चतुष्फलक OABC के केन्द्रक के निर्देशांक

$$x = \frac{a}{4},\ y = \frac{b}{4},\ z = \frac{c}{4} \qquad (1 \text{ अंक})$$

$$\therefore \qquad a = 4x\ ,\ b = 4y\ ,\ c = 4z$$

ये मान समीकरण (2) में रखने पर केन्द्रक का बिन्दुपथ

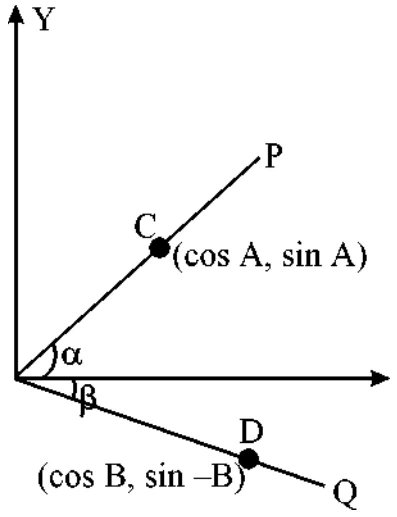
$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{16y^2} + \frac{1}{16z^2} \qquad (1 \text{ अंक})$$

या

$$\frac{16}{p^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \qquad (1 \text{ अंक})$$

**उत्तर–15**

x–अक्ष के साथ OP तथा OQ क्रमशः $\alpha$ व $-\beta$ कोण बनाते हैं। $\overrightarrow{OC}$ व $\overrightarrow{OD}$ क्रमशः $\overrightarrow{OP}$ व $\overrightarrow{OQ}$ की ओर एकांक सदिश है। तब C व D के निर्देशांक क्रमशः (cos A, sin A) तथा (cos B, –sin B) होंगे।




(1 अंक)

$$\overrightarrow{OC} = (\cos A)\,\hat{i} + (\sin A)\,\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OD} = (\cos B)\,\hat{i} + (\sin B)\,\hat{j} \qquad \text{(1 अंक)}$$

$$\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OC} = \left[(\cos B)\,\hat{i} - (\sin B)\,\hat{j}\right] \times \left[\cos A)\,\hat{i} + (\sin A)\,\hat{i}\right]$$

(1 अंक)

$|OD|\ |OC|\ \sin COD$ में $= (\cos B \sin A)\,\hat{i} \times \hat{j} - (\sin B \cos A)\,\hat{j} \times \hat{i}$

या $1.1\ \sin(A + B)$ में (1 अंक)

$$= (\sin A \cos B)\,\hat{n} - (\cos A \sin B)\,(-\hat{n})$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad \text{(1 अंक)}$$

**प्रश्न–15 का अथवा का उत्तर**

बायाँ पक्ष $\quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

$$= (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} + (\vec{b}.\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} + (\vec{c}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} \qquad \text{(2 अंक)}$$

$$= (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} + (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} - (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} \qquad \text{(2 अंक)}$$

= 0 दायाँ पक्ष

(अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$)

(1 अंक)

**उत्तर–16**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}$$ (1 अंक)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2-1}{x^2+1} = -f(x)$$ (2 अंक)

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$ (2 अंक)

**प्रश्न–16 का अथवा का उत्तर–**

L.H.L.

$$\lim_{x\to \bar{o}} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h)$$ (1 अंक)

$$= \frac{1-\cos(-h)}{(-h)^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}$$ (1 अंक)

$$= 2\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$ (1 अंक)

$$= \frac{2}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$$

R.H.L.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

∴ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ (1 अंक)

अतः फलन $x = 0$ पर संतत है

**उत्तर–17**

माना $\tan \frac{x}{2} = t$

∴ $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx = dt$ (1 अंक)

या $dx = \frac{2dt}{\sec^2 \frac{x}{2}}$

$$dx = \frac{2dt}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2dt}{1+t^2}$$

अब $I = \int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left[5+\frac{4\times t}{1+t^2}\right]}$ (1 अंक)

$$\left[\because \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{5+5t^2+8t} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$ (1 अंक)

$$= \frac{2}{5}\times\frac{1}{\frac{3}{5}}\tan^{-1}\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5t+4}{3}$$ (1 अंक)

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}+c$$ (1 अंक)

**प्रश्न–17 का अथवा का उत्तर**

माना $$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}{1+\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \quad \text{..........(1)}$$ (1 अंक)

पुनः $$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \quad \text{........(2)}$$

(1 अंक)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$$ (1 अंक)

$$= \int_0^{\pi/2}1\,dx = [x]_0^{\pi/2}$$ (1 अंक)

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$ (1 अंक)

यही सिद्ध करना था।

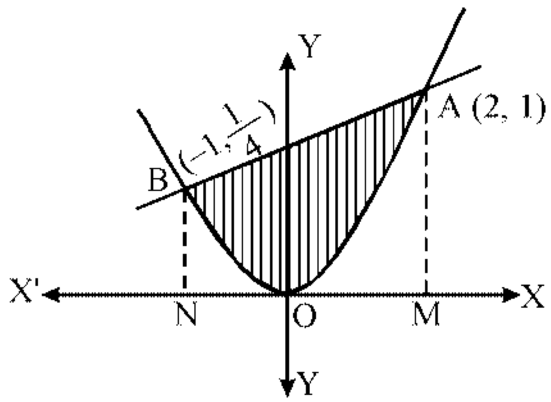
**उत्तर–18**

परवलय $x^2 = 4y$ तथा $x = 4y - 2$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $(2, 1)$ तथा $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ होंगे। (1 अंक)

अभीष्ट क्षेत्रफल (OAB) =

समलंब चतुर्भुज BNMA का क्षेत्रफल – [क्षेत्रफल BNO + क्षेत्रफल OMA]

(1 अंक)




(1 अंक)

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)\times 3-\int_{-1}^{2} y\, dx$$

$$= \frac{15}{8}-\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{4}\, dx$$

$$= \frac{15}{8}-\left[\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{2}$$ (1 अंक)

$$= \frac{15}{8}-\frac{1}{12}\ (8 + 1$$

$$= \frac{15}{8}-\frac{3}{4}$$

$$= \frac{9}{8}$$ वर्ग इकाई (1 अंक)

**प्रश्न–18 का अथवा का उत्तर–**

$$I = \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$$

Put $a = r\sin\alpha, \quad \alpha = r\cos\alpha$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{a}{b}$$ (1 अंक)

$\therefore$
$$I = \int \frac{dx}{r\sin\alpha\cos x + r\cos\alpha . \sin x}$$

$$= \int \frac{dx}{r\sin(x+\alpha)}$$ (1 अंक)

$$= \frac{1}{r}\int \text{cosec } (x + \alpha)\ dx$$ (1 अंक)

$$= \frac{1}{r} \log \tan\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{r} \log \left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] + c$$ (1 अंक)

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)\right] + c$$

(1 अंक)

**उत्तर—19**

$$x + y \frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{y}$$ (1 अंक)

माना $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2v-1}{v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2v-1}{v} - v$$ (1 अंक)

समाकलन करने पर $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v\,dv}{(v-1)^2}$

$$\log x = -\log (v-1) + \frac{1}{v-1} + c$$ (1 अंक)

$$\log x + \log (v-1) = \frac{1}{v-1} + c$$

$$\log \left\{x\left[\frac{y}{x}-1\right]\right\} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}-1\right)} + c$$ (1 अंक)

$$\log (y-x) = \frac{x}{y-x} + c$$ (1 अंक)

**प्रश्न–19 का अथवा का उत्तर**

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

या $$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x^2}{1+x^2}$$ (1 अंक)

$\therefore$ $$P = \frac{2x}{1+x^2} \qquad Q = \frac{4x^2}{1+x^2}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx}$$

$$= e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)}$$

$$= 1 + x^2$$ (1 अंक)

$\therefore$ अभीष्ट हल होगा–

$$y \times \text{I.F.} = \int \theta \times (\text{I.F.})\,dx + c$$

$$y(1 + x^2) = \int \frac{4x^2}{1+x^2}(1 + x^2)\,dx + c$$

या $$y(1 + x^2) = \int 4x^2\,dx + c$$ (1 अंक)

$$= \frac{4x^2}{3} + c$$

$$3y(1 + x^2) = 4x^3 + 3c$$ (1 अंक)

## दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Anwer Question)

**उत्तर–20**

$$2l + 2n - m = 0 \quad \text{..........(1)}$$

$$ml + mn + nl = 0 \quad \text{.........(2)}$$

समीकरण (1) से $m = 2(l + n)$ (1 अंक)

.यह मान (2) में रखने पर

$$2(l + n)n + nl + 2l(l + n) = 0$$

या $2n^2 + 2nl + nl + 2l^2 + 2ln = 0$

या $2l^2 + 5nl + 2n^2 = 0$ (1 अंक)

$$(2l + n)(2n + l) = 0$$

$$2l + n = 0 \quad \text{......(3)}$$ (1 अंक)

या $l + 2n = 0$ ..........(4)

समीकरण (3) से $2l + 0 \,.\, m + n = 0$

समीकरण (1) से $2l - m + 2n = 0$

वज्र गुणन से $\qquad \dfrac{\ell}{0+1} = \dfrac{m}{2-4} = \dfrac{n}{-2-0}$

या $\qquad \dfrac{\ell}{1} = \dfrac{m}{-2} = \dfrac{n}{-2}$

$$\frac{\ell}{-1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{2}$$ (1 अंक)

$\therefore$ प्रथम रेखा के दिक् अनुपात –1, 2, 2

समीकरण (4) से $\quad l + 0.m + 2.n = 0$

समीकरण (1) से $\quad 2l - m + 2n = 0$

$$\frac{\ell}{0+2} = \frac{m}{4-2} = \frac{n}{-1}$$

या $\qquad \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{-1}$

$\therefore$ दूसरी रेखा के दिक् अनुपात 2, 2, –1 यदि दोनों रेखाओं के बीच का कोण $\theta$ है तो (1 अंक)

$$\cos\theta = \frac{(-1)(2)+(2)(2)+2(-1)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+4+1}}$$

$$= \frac{-2+4-2}{9} = 0$$

$$\theta = 90°$$ (1 अंक)

**प्रश्न–20 का अथवा का उत्तर**

रेखाएँ $\qquad \dfrac{x-x_1}{\ell_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$

तथा $\qquad \dfrac{x-x_2}{\ell_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ समतलीय होंगी यदि–

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$ (1 अंक)

यहाँ $(x_1\ y_1\ z_1) = (0, 2, -3)$ , $\quad (x_2\ y_2\ z_2) = (2, 6, 3)$

$l_1 = 1$ , $m_1 = +2$, $n_1 = 3$ , $\quad l_2 = 2$ , $m_2 = 3$, $n_2 = 4$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 2-0 & 6-2 & 3+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ (1 अंक)

$$2\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix} = 0$$ अतः रेखाएँ समतलीय हैं (1 अंक)

प्रथम रेखा के किसी बिंदु के निर्देशांक $(r\ ,\ 2r + 2,\ 3r - 3)$ है। यदि वह बिन्दु द्वितीय रेखा पर भी स्थित है तो–

$$\frac{r-2}{2} = \frac{2r+2-6}{3} = \frac{3r-3-3}{4}$$ (1 अंक)

हल करने पर $r = 2$ (1 अंक)

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु होगा $(2,\ 2 \times 2 + 2\ ,\ 3 \times 2 - 3)$ अर्थात् $(2,\ 6,\ 3)$

(1 अंक)

**उत्तर–21**

दिया है $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k} + \lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)$ .......(1)

और $\vec{r} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k} + \mu\left(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}\right)$ .......(2)

$\vec{a}_1 = 3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ , $b_1 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ (1 अंक)

और $\vec{a}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ , $b_2 = 3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$

अब $\vec{a}_2-\vec{a}_1 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}-\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ (1 अंक)

$= \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

और $$\vec{b}_1\times\vec{b}_2 = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$$ (1 अंक)

$= \hat{i}\,(15-16)+\hat{j}\,(12-10)+\hat{k}\,(8-9)$

$= -\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\Rightarrow$ $|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ (1 अंक):

न्यूनतम दूरी $$= \frac{\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right).\left(\vec{b}_1\times\vec{b}_2\right)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}$$

$$\frac{\left(\hat{i}\times\hat{j}\times\hat{k}\right).\left(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)}{\sqrt{6}} = 0$$ (2 अंक)

**प्रश्न–21 का अथवा का उत्तर–**

माना गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ......(1)

गोले का केन्द्र $(-u, -v, -w)$ (1 अंक)

रेखा $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ पर स्थित है–

$\therefore \quad 5(-v) + 2(-w) = 0 \quad = 2(-u) - 3(-v)$

$5v + 2w = 0$ ........(2)

तथा $2u - 3v = 0$ ......(3) (1 अंक)

पुनः बिन्दु $(0, -2, -4)$ तथा $(2, -1, -1)$ गोले पर (1) पर है

$\therefore \; 0 + 4 + 16 - 4v - 8w + d = 0$

$20 - 4v - 8w + d = 0$ (1 अंक)

इसी प्रकार $6 + 4u - 2v - 2w + d = 0$ .........(4) (1 अंक)

समीकरण (2), (3), (4), (5) को हल करने पर

$u = -3 \; , \; v = -2 \; , \; w = 5, \; d = 12$ (1 अंक)

समीकरण (1) में ये मान रखने पर

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(-3)x + 2(-2)y + 2.5.z + 12 = 0$

अतः $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 10z + 12 = 0$ (1 अंक)

# प्रश्न—पत्र ब्लू प्रिन्ट
## परीक्षा — हायर सेकेण्डरी

कक्षा—12 पूर्णांक—100

विषय— उच्च गणित समय—3 घण्टा

| क्र. | इकाई | इकाई पर निर्धारित अंक | वस्तुनिष्ठ प्रश्न | अंकवार प्रश्नों की संख्या | | | कुल प्रश्न |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 अंक | 4 अंक | 5 अंक | 6 अंक | |
| 1. | आंशिक भिन्न | 05 | 01 | 01 | — | — | 01 |
| 2. | प्रतिलोम फलन | 05 | 01 | 01 | — | — | 01 |
| 3. | समतल ज्यामितीय | | | | | | |
| 4. | समतल | 15 | 04 | — | 01 | 01 | 02 |
| 5. | सरल रेखा एवं गोला | | | | | | |
| 6. | सदिश | | | | | | |
| 7. | सदिशों का गुणनफल | 15 | 04 | — | 01 | 01 | 02 |
| 8. | सदिशों का त्रिविमीय ज्यामितीय में अनुप्रयोग | | | | | | |
| 9. | फलन, सीमा तथा सांतत्य | 05 | — | — | 01 | — | 01 |
| 10. | अवकलन | 10 | 02 | 02 | — | — | 02 |
| 11. | कठिन अवकलन | | | | | | |
| 12. | अवकलन का अनुप्रयोग | 05 | 01 | 01 | — | — | 01 |
| 13. | समाकलन | | | | | | |
| 14. | कठिन समाकलन | 15 | 05 | — | 02 | — | 02 |
| 15. | निश्चित समीकलन | | | | | | |
| 16. | अवकल समीकरण | 05 | — | — | 01 | — | 01 |
| 17. | सहसंबंध | 05 | 01 | 01 | — | — | 01 |
| 18. | समाश्रयण | 05 | 01 | 01 | — | — | 01 |
| 19. | प्रायिकता | 05 | — | — | 01 | — | 01 |
| 20. | आंकिक विधियाँ | 05 | 05 | — | — | — | — |
| | कुल | 100 | 25 | 07 | 07 | 02 | 16 |